Beyträge
zur Aufnahme
der Theoretischen
Mathematik

von

Wencesl. Joh. Gustav Karsten,
der Weltweisheit Doctor und der Vernunftlehre
ordentlichen Professor zu Rostok.

Das zweyte Stük.

Rostok,
bey Anton Ferdinand Röse. 1759.

Fortsetzung der Abhandlung

von den

Grundsätzen der Differential- und Integral-Rechnung.

Ich bin so kühn, den Versuch fortzusetzen, welchen ich gemacht habe, die Grundsätze der erhabensten menschlichen Wissenschaften von gewissen Schwierigkeiten zu befreyen, welchen nicht diese Wissenschaften selbst unterworfen sind, sondern welche höchstens nur dem Vortrag derselben in vielen Lehrbüchern können zur Last gelegt werden. Die Differentialrechnung gründet sich auf diese Voraussetzung, daß wenn y eine Funktion der veränderlichen Grösse x ist, und man x um eine gewisse Grösse, die ich hier mit dem Herrn Euler durch Δx bezeichnen will, vermehret oder vermindert, folglich $x + \Delta x$ anstat x in der Funktion y gesezt, diese Funktion y ebenfals um eine gewisse Grösse vermehrt oder vermindert werden müsse. Bezeichnet man diese Grösse, um welche y bey dieser Voraussetzung geändert wird, mit Δy, so wird Δy eine gewisse Funktion

von

von Δx seyn, und zwar eine solche, die, wenn $\Delta x = 0$ gesezt wird, ebenfals vernichtet werden mus. Man findet diese Funktion Δy der veränderlichen Grösse Δx, wenn man würklich $x + \Delta x$ stat x in der Funktion y sezt, und von dem veränderten Wehrt der Funktion y, den ich hier mit $\overset{\mathrm{I}}{y}$ bezeichnen werde, die Funktion y selbst subtrahirt, so daß $\Delta y = \overset{\mathrm{I}}{y} - y$. Man weis es, daß, wenn Z eine Funktion von der veränderlichen Grösse z ist, die Funktion Z allemahl diese Form haben könne $Z = a + bz + cz^2 + ez^3 + fz^4 +$ etc. und eben daraus könte man schon schliessen, es müsse auch der Funktion Δy der veränderlichen Grösse Δx allemahl diese Form gegeben werden können $\Delta y = A + P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4 +$ etc. in welcher Formul aber allemahl $A = 0$ seyn müste, weil, wenn $\Delta x = 0$ auch $\Delta y = 0$ seyn mus, so daß $\Delta y = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4$ etc. Ich habe aber auch in der ersten Abhandlung des ersten Stüks dieser Schrift aus der Natur der algebraischen Funktionen dargethan, daß wenn y eine algebraische Funktion von x ist, allemahl die Differenz Δy diese Form habe, und man weis eben daher, daß $P, Q, R, S,$ u. s. w. algebraische Funktionen von x sind, die in einem jeden Fall von der Funktion y abhängen. Es ist zu meiner Absicht hinreichend, wenn ich auch in dieser Abhandlung nur von algebraischen Funktionen rede. Ich habe im vorigen Stük das gewöhnliche Zeichen dx gebraucht, die Differenz einer veränderlichen Grösse x überhaupt anzuzeigen, sowohl wenn sie einen bestimten endlichen Wehrt hat, als auch, wenn sie $= 0$ gesezt wird. Ich will von nun an, weil es desto deutlicher ist, beyde Fälle von einander unterscheiden, und die endliche Differenz der veränderlichen Grösse x mit Δx bezeichnen, und das Zeichen dx nur alsdann gebrauchen, wenn diese Differenz $= 0$ gesezt wird. Auf diese Art wird auch Δy die endliche Differenz der Funktion y anzeigen, an

dessen

dessen Stelle das Zeichen dy, wenn diese Differenz $=0$ ist, soll gesezt werden.

Es sey also y eine algebraische Funktion der veränderlichen Grösse x, und also $\Delta y = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4 +$ etc. und wenn $\Delta x = 0 = dx$, nunmehro $dy = Pdx + Qdx^2 + Rdx^3 + Sdx^4 +$ etc. Ist es wahr, daß $dy = 0$, $Pdx = 0$, $Qdx^2 = 0$ u. s. w. so kan man nicht nur sagen, es sey $dy = Pdx$, sondern es ist auch $dy = Qdx^2$, $dy = Rdx^3$, u. s. w. Die erste Gleichung $dy = Pdx$ wird von allen Analysten in der Differential- und Integralrechnung zum Grunde gelegt. Ich selbst habe sie in der vorigen Abhandlung angenommen, und auf verschiedene leichte Fälle angewendet. Ist es wahr, daß alle die übrigen Gleichungen $dy = Qdx^2$ u. s. w. eben so richtig sind; so hat es das Ansehen, als wenn die Regeln der Differentialrechnung nur zufällig sind. Es scheint, daß man diese Erfindungskunst eben so gut auf eine von den andern Gleichungen bauen könte, wenn etwa die Rechnungen dadurch erleichtert würden. Ich habe in der vorigen Abhandlung dieser Sache noch nicht erwehnet, weil mir die Gründe noch fehlten, davon richtig zu urtheilen. Diese Abhandlung sol hierauf entscheidend antworten. Diese Gleichungen sind nicht alle gleich brauchbar, und man kan in einem gewissen Verstande sagen, daß nur die erste, nemlich $dy = Pdx$ ihre Richtigkeit habe, wenn man nemlich aus diesen Gleichungen weiter schliessen will. Um sich davon zu überzeugen, nehme man zuerst diese endliche Gleichung vor sich: $\Delta y = P\Delta x + Qdx^2 + Rdx^3 + S\Delta x^4 +$ etc. daraus läst sich folgende schliessen $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + Q\Delta x + R\Delta x^2 + S\Delta x^3 +$ etc. und diese Gleichung enthält folgende Proportion $\Delta x : \Delta y = 1 : P + Q\Delta x + R\Delta x^2 + S\Delta x^3$ etc. Weil Δx eine veränderliche Grösse ist, so mus man derselben alle mögliche Wehrte beylegen können,

und die Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + Q\Delta x + R\Delta x^2 + S\Delta x^3 +$ etc. mus allemahl richtig bleiben. Man setze also $\Delta x = 0$, und schreibe daher nunmehro dx anstat Δx, bey welcher Voraussetzung auch dy anstat Δy mus gesezt werden, da Δy eine solche Funktion ist von Δx, welche $= 0$ wird, wenn man $\Delta x = 0$ sezt; so wird $\frac{dy}{dx} = P + Qdx + Rdx^2 + Sdx^3 +$ etc. $= P$, worin diese Proportion liegt $dx : dy = 1 : P + Qdx + Rdx^2 + Sdx^3 +$ etc. $= 1 : P$, weil alle die übrigen Glieder Qdx, Rdx^2, u. s. w. $= 0$ sind. Man findet eben dieselbige Gleichung $\frac{dy}{dx} = P$, wenn man $dy = Pdx$ sezt, und alle die übrigen Glieder $Qdx^2 + Rdx^3$ u. s. w. aus der Acht läst, weil sie nicht nur alle der Strenge nach $= 0$ sind, sondern auch dazu nichts beitragen, wenn der Wehrt des Bruchs $\frac{dy}{dx}$ oder das Verhältnis $1 : P$ gefunden werden soll. Aus den übrigen Gleichungen $dy = Qdx^2$ u. s. w. würde man diese Folge nicht herleiten können. So würde z. E. folgen, wenn $dy = Qdx^2$, daß $\frac{dy}{dx} = Qdx = 0$ sey, welches mit dem vorhergehenden nicht bestehen kan. Ein neuer Beweis, daß man in seinen Schlüssen sehr behutsam seyn müsse, wenn die 0 im calculo als ein Faktor vorkomt. Ich habe oben bewiesen, daß die Gleichung $3 \times 0 = 4 \times 0$ ungezweifelt richtig sey, so lange die Zahlen, welche mit 0 multiplicirt sind, nicht durch die Division mit 0 wieder hergestelt werden. Es ist aber unstreitig falsch geschlossen, wenn

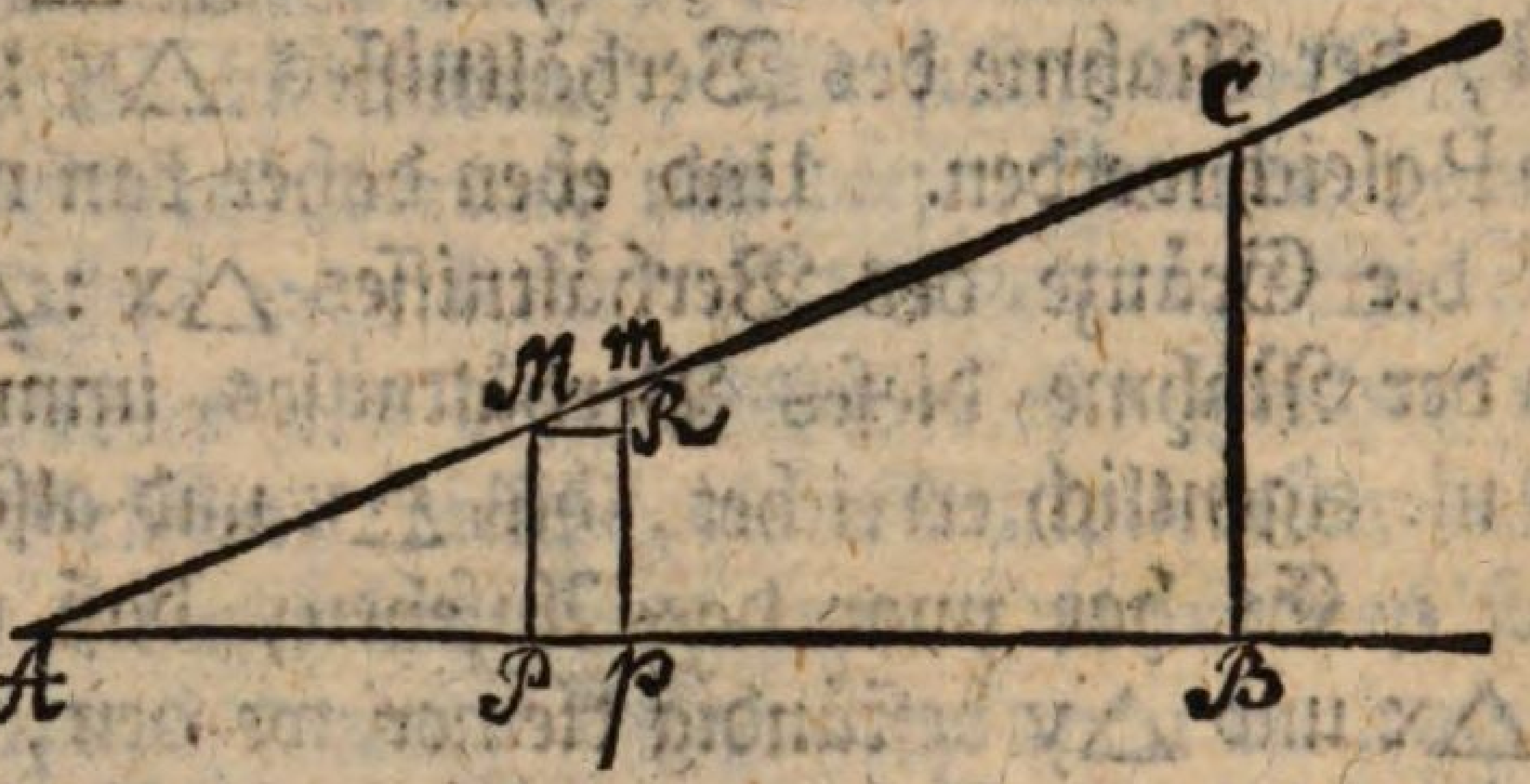
wenn man daraus die Folge zieht, es sey $\frac{3 \times o}{o} = \frac{4 \times o}{o}$, und also $3 = 4$. Und so verhält es sich auch mit der Gleichung $dy = Qdx^2$. Noch weniger wird man aus der Gleichung $dy = Qdx^2$ schliessen können, es sey $\frac{dy}{dx^2} = Q$, und also das Verhältnis $dx^2 : dy$ gleich einem endlichen Verhältnis $1 : Q$. Es folgt vielmehr aus der Formul $dy = Pdx + Qdx^2 + Rdx^3 + Sdx^4 +$ etc. dieses, daß $\frac{dy}{dx^2} = \frac{P}{dx} + Q + Rdx + Sdx^2 +$ etc. $= \frac{P}{dx} + Q$ sey, woraus sich ergiebt, daß das Verhältnis $dx^2 : dy$ ein unendliches Verhältnis sey, welches auch mit demjenigen völlig übereinstimmet, was zum Schlus der ersten Abhandlung bewiesen ist, daß nemlich $\frac{o}{o^2}$ ein unendliches Verhältnis anzeige.

Soll die Gleichung $\frac{dy}{dx} = P$ nach der Strenge richtig seyn, so mus vorausgesezt werden, daß $P + Qdx + Rdx^2 + Sdx^3 +$ etc. $= P$ oder $P + Q \times o + R \times o^2 + S \times o^3 +$ etc. $= P$ sey. Bedarf aber dieses auch wohl eines Beweises. Ist nicht $Q \times o = o$, $R \times o^2 = o$, $S \times o^3 = o$ u. s. w. und ist nicht $P + o + o + o + o$ etc. $= P$? Ich glaube nicht, daß mir irgend jemand hierin seinen Beyfall versagen werde. Und eben hieraus ergiebt sich die wahre Ursache, warum man in der Gleichung $dy = Pdx + Qdx^2 + Rdx^3 +$ etc. alle die Glieder, welche

che auf Pdx folgen, ſicher und ohne den geringſten Irthum aus der Acht laſſen kan. Die Urſache davon iſt nicht dieſe, weil Qdx^2 unendliche mahl kleiner iſt, als Pdx, Rdx^3 unendliche mahl kleiner als Qdx^2 u. ſ. w. Ich geſtehe gar gerne, daß ich dabey keine Gedanken habe, wenn man ſagt, daß eine o kleiner als die andre o ſey, und daher noch viel weniger, wenn man behaupten will, daß eine o ſo gar unendliche mahl, ja unendlich unendliche mahl kleiner ſey, wie die andre. An ſich, und ſo lange man weiter keine Veränderung mit dieſen Zeichen vornimt, iſt $Pdx = Qdx^2 = Rdx^3 = Sdx^4$ etc. $= 0$. Nur mus man anders von dem Wehrt dieſer Zeichen urtheilen, wenn die Gröſſen, welche die Multiplication mit o vernichtet hat, durch entgegengeſezte Operationen ſollen wieder hergeſtellet werden. Was ſucht man denn eigentlich in der Differentialrechnung? Sucht man den Wehrt von der Differenz der Funktion y in der Vorausſezung, daß die Differenz der veränderlichen Gröſſe x, wovon y eine Funktion iſt, $= 0$ ſey? Hiezu iſt man keiner Regeln benöthiget, weil man ſchon ohnedem weis, daß in dieſer Vorausſezung die Differenz von y gleich Null ſey. Diejenigen treffen eigentlich das weſentliche dieſer vortreflichen Wiſſenſchaft, welche ſie durch eine Methode erklären, das Verhältnis zu finden, welches zwiſchen der Differenz einer veränderlichen Gröſſe x und der Differenz einer gegebenen Funktion y dieſer Gröſſe ſtatt findet, wenn jene, und daher zugleich dieſe $= 0$ geſezt wird. Dies Verhältnis iſt ſodann eigentlich nicht das Verhältnis der beyden Nullen dx und dy gegen einander, ſondern das Verhältnis, mit welchem die beyden endlichen Gröſſen $\triangle x$ und $\triangle y$ Null werden, oder noch deutlicher, die Grenze des Verhältniſſes $\triangle x : \triangle y$, welcher ſich dieſes Verhältnis zwar immer nähert, je kleiner $\triangle x$ wird, aber doch nicht erreicht, bevor $\triangle x = 0$ iſt. Um dieſes gehörig zu verſtehen, ſtelle man ſich nochmahl die Proportion $\triangle x : \triangle y = 1 : P + Q\triangle x + R\triangle x^2 + S\triangle x^3 +$ etc. vor, und man ſiehet leicht, daß

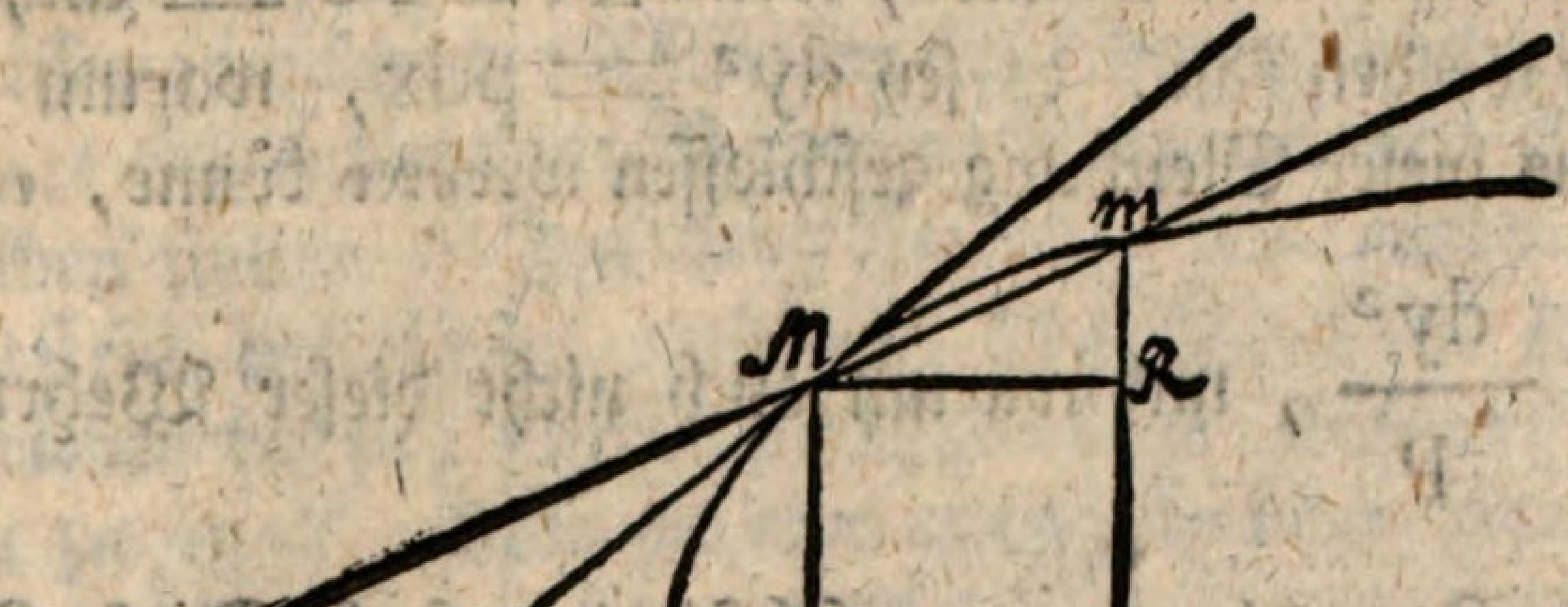
daß, wenn man sezt, daß Δx nach und nach kleiner wird, der Wehrt des Bruchs $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, oder welches einerley ist, der Exponent des Verhältnisses $\Delta x : \Delta y$ ebenfals nach und nach kleiner werden, und von der Funktion P immer weniger unterschieden seyn müsse, je kleiner Δx angenommen wird. Es kan aber niemahlen, so lange Δx noch eine Grösse ist, der Nahme des Verhältnisses $\Delta x : \Delta y$ der Funktion P gleich werden. Und eben daher kan man sagen, es sey P die Gränze des Verhältnisses $\Delta x : \Delta y$, welcher sich der Nahme dieses Verhältnisses immer nähert, und doch nie eigentlich erreichet, bis Δx und also auch $\Delta y = o$ ist. — Es hat zwar das Ansehen, daß wenn zwey Grössen Δx und Δy beständig kleiner werden, ihr leztes Verhältnis, oder die Grenze, welcher ihr Verhältnis gegen einander sich auf diese Art immer nähert, nicht angegeben werden könne, weil es noch nicht das lezte Verhältnis ist, wenn Δx und Δy noch eine Grösse haben, und weil alsdann die Grössen Δx und Δy gar kein Verhältnis eigentlich gegen einander haben, wenn sie beyde $= o$ sind. Allein in diesen Gedanken ist keine Folge. Man würde auf eben die Art beweisen können, daß die lezte Geschwindigkeit, mit welcher ein Cörper einen gewissen Ort erreicht, und daselbst in Ruhe komt, sich nicht angeben lasse, weil die Geschwindigkeit des Cörpers noch nicht die lezte ist, so lange er sich beweget, und der Cörper gar keine Geschwindigkeit mehr hat, wenn er in Ruhe ist. Die lezte Geschwindigkeit eines solchen Cörpers ist nicht diejenige, welche ihm beygeleget werden mus, bevor er in Ruhe komt, auch nicht diejenige, welche er hat, wenn er schon in Ruhe ist, sondern diejenige, mit welcher er in Ruhe komt. Eben so ist das lezte Verhältnis der Grössen Δx und Δy gegen einander nicht dasjenige, was zwischen ihnen stat findet, so lange sie würkliche Grössen sind; auch nicht dasjenige, worin sie sich befinden, wenn sie schon o geworden sind; son-

dern dasjenige, mit welchem sie o werden. Dies ist die Gränze, welcher sich das Verhältnis $\triangle x : \triangle y$ zwar immer nähert, je kleiner $\triangle x$ und $\triangle y$ werden, so es aber nicht erreicht, so lange diese Grössen noch nicht würklich $=$ o geworden. Ich habe oben in der ersten Abhandlung aus der Gleichung $y = \frac{b}{a} x$ für die grade Linie AC,



wenn $AB = a$, $BC = b$, $AP = x$, $PM = y$, und die Fläche $APM = s$, $Pp = \triangle x$, $Rm = \triangle y$, $PpmM = \triangle s$, geschlossen, es sey $\triangle s = \frac{b}{a} x \triangle x + \frac{b}{2a} \triangle x^2$. Ich sezte $\triangle x = o = dx$, und daraus folgte $ds = \frac{b}{a} xdx + \frac{b}{2a} dx^2$, oder $ds = \frac{b}{a} xdx$, weil $\frac{b}{2a} dx^2 = o$. Wolte man hieraus nichts weiter schliessen, so könte man mit eben dem Grunde setzen $ds = \frac{b}{2a} dx^2$, weil auch $ds = o$, und $\frac{b}{2a} dx^2 = o$. Allein man stelle sich nun vor, es sey aus der Gleichung $\triangle s = \frac{b}{a} x \triangle x + \frac{b}{2a} \triangle x^2$ geschlossen $\frac{\triangle s}{\triangle x} = \frac{b}{a} x + \frac{b}{2a} \triangle x$, so ist $\frac{b}{a} x$ die

die Grenze des Verhältnisses $\Delta x : \Delta s$, welches man durch die gewöhnlichen Zeichen so ausdrükt $\frac{ds}{dx} = \frac{b}{a} x = y$, und diese Gleichung ist einerley mit der gewöhnlichen $ds = ydx$. Bey denjenigen Aufgaben, deren Auflösung man durch die Differentialrechnung allein findet, ist nun weiter gar nichts übrig, das auch nur den Schein einer Schwierigkeit oder Undeutlichkeit hätte, wenn man sich daran in den aus der Methode der Tangenten bekanten Formuln nur allemahl erinnert, daß $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dy}$ niemahlen etwas anders, als eine endliche Grösse sey, nemlich die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oder $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Ich wil das obige Beyspiel von der Parabel, welches S. 31. vorgekommen, zur Erläuterung auch hier beybehalten.



Aus der Gleichung $yy = px$ folgt, es sey $2y\Delta y + \Delta y^2 = p\Delta x$, und daraus schliest man weiter $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{2y + \Delta y}{p}$. Die Grenze dieses Verhältnisses ist $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, woraus

die

die Gleichung $dx = \frac{2ydy}{p}$, folgt, welche man sonst annimt, und in der algemeinen Formul der Subtangente $\frac{ydx}{dy}$ substituirt. Wir dürfen nur gleich $\frac{2y}{p}$ anstat $\frac{dx}{dy}$ setzen, welches eben dasselbe ist. Ich habe mich oben nach der gewöhnlichen Art, die Tangenten zu suchen gerichtet, und aus der Differential-Gleichung $2ydy = pdx$ für die Parabel geschlossen, es sey $dx = \frac{2ydy}{p}$, und habe diesen Wehrt für dx in der algemeinen Formul der Subtangente $\frac{ydx}{dy}$ gesezt. Allein hier bleibt der Zweifel allemahl noch übrig, da aus der Gleichung $2y\Delta y + \Delta y^2 = p\Delta x$ mit eben dem Grunde, wenn $\Delta x = 0 = dx$, geschlossen werden kan, es sey $dy^2 = pdx$, warum auch nicht aus dieser Gleichung geschlossen werden könne, es sey $dx = \frac{dy^2}{p}$, und warum auch nicht dieser Wehrt für dx in der Formul $\frac{ydx}{dy}$ zu substituiren sey? Dieser Zweifel wird völlig gehoben, wenn man sich daran erinnert, wie die Formul $\frac{ydx}{dy}$ für die Subtangente aus der Formul für die Subsekante $\frac{y\Delta x}{\Delta y}$ folgt. Diese leztere Formul zeigt, daß die Subsekante allemahl das Produkt von y in den

den Bruch $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, oder den Exponenten des Verhältnisses $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ sey. Dieser Exponent ist veränderlich, wenn Δx veränderlich ist. Er ist in der Parabel $= \frac{2y + \Delta y}{p}$, und nimt ab, wenn Δx nach und nach kleiner wird. So bald als Δx und also auch $\Delta y = 0$ ist; so wird $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{2y}{p} + \frac{0}{p} = \frac{2y}{p}$, und mit den gewöhnlichen Zeichen $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$. Was hat also die Aufgabe: *Eine gegebene Funktion einer veränderlichen Grösse differentiiren*, eigentlich für einen Sinn? keinen andern, als diesen: Man soll die Grenze des Verhältnisses zwischen der Differenz einer veränderlichen Grösse, und der respondirenden Differenz der gegebenen Funktion derselben finden. Aus dem Vortrag der meisten Lehrer, wenigstens derjenigen, welche in Teutschland für Anfänger geschrieben haben, scheint der Sinn dieser Aufgabe der folgende zu seyn: Man sol eine unendlich kleine Grösse finden, welche, wenn sie unendliche mahl genommen wird, der gegebenen Funktion gleich ist. Man ist jezt im Stande zu urtheilen, welcher Sinn der richtige sey.

Auf eben solche augenscheinlich richtige Schlüsse gründet sich auch die so genante Differentio-Differentialrechnung. Kenner dieser unvergleichlichen Erfindungskunst werden es mir leicht verzeihen, wenn ich auch hier bis auf die ersten Gründe zurük gehe, da diese Schrift nach meiner Absicht vornemlich Anfängern nüzen sol, welche sich meinem Unterricht

terricht in dieser Wissenschaft anvertrauen. Diese Absicht erlaubt es nicht, daß ich meinen Vortrag zu kurz fasse, und dabey zu viel voraussetze. Eine jede Funktion y der veränderlichen Grösse x bekömt einen andern Wehrt, wenn man den Wehrt der Grösse x ändert. Wenn man also in der Funktion y anstatt x nach und nach folgende Wehrte, welche in einer arithmetischen Progression fortgehen, setzet, nemlich x; $x+\Delta x$; $x+2\Delta x$; $x+3\Delta x$; $x+4\Delta x$; u. s. w. so bekomt man eine Reihe von Grössen, welche ganz füglich auf folgende Art bezeichnet werden können. Es sey $\overset{I}{y}$ der Wehrt, welchen die Funktion y bekomt, wenn man in derselben $x+\Delta x$ anstat x setzet: $\overset{II}{y}$ sey der Wehrt derselben Funktion y, wenn man statt x in derselben $x+2\Delta x$ setzet; und auf ähnliche Art bezeichne man die folgenden Wehrte der Funktion y mit $\overset{III}{y}$; $\overset{IV}{y}$; $\overset{V}{y}$; $\overset{VI}{y}$; etc.; so wird man folgende einander respondirende Wehrte der veränderlichen Grösse x, und ihrer Funktionen y erhalten.

$$x;\ x+\Delta x;\ x+2\Delta x;\ x+3\Delta x;\ x+4\Delta x;\ x+5\Delta x;\ \text{etc.}$$

$$y;\ \overset{I}{y};\ \overset{II}{y};\ \overset{III}{y};\ \overset{IV}{y};\ \overset{V}{y};\ \text{etc.}$$

Man siehet leicht, daß in dieser Reihe der Wehrte von y allemahl der folgende aus dem unmittelbar vorhergehenden entstehet, wenn man in diesem $x+\Delta x$ anstat x schreibt. So wird ja $\overset{II}{y}$ aus y, wenn in y stat x geschrieben wird, $x+2\Delta x$. Nun ist es aber einerley, ob man zuerst in y $x+\Delta x$ stat x schreibet, wodurch man $\overset{I}{y}$ bekomt, und nun in $\overset{I}{y}$ aufs neue $x+\Delta x$ statt x schreibt; oder ob man auf einmahl $x+2\Delta x$ stat x in y sezt. In beyden Fällen erhält man eben den Wehrt. Also wird $\overset{II}{y}$ aus $\overset{I}{y}$, wenn man in $\overset{I}{y}$

x+

$x + \Delta x$ stat x sezet. Aus eben den Gründen wird y^{III} aus y^{II}, wenn in y^{II} stat x gesezt wird $x + \Delta x$, u. s. w. Man subtrahire ein jedes Glied der Reihe y von dem nechstfolgenden, so ist das Resultat die Differenz des vorhergehenden Gliedes, und man bekomt eine neue Reihe, welche aus den Differenzen der Wehrte von y bestehet. Sie ist $y^{I} - y = \Delta y$; $y^{II} - y^{I} = \Delta y^{I}$; $y^{III} - y^{II} = \Delta y^{II}$; $y^{IV} - y^{III} = \Delta y^{III}$; $y^{V} - y^{IV} = \Delta y^{IV}$; u. s. w. Diese Reihe der Differenzen

$$\Delta y\;;\quad \Delta y^{I}\;;\quad \Delta y^{II}\;;\quad \Delta y^{III}\;;\quad \Delta y^{IV}\;;\quad \Delta y^{V}\;;\ \text{u. s. w.}$$

hat wiederum die Eigenschaft, daß das folgende Glied derselben aus dem unmittelbar vorhergehenden entsteht, wenn in diesem stat x gesezt wird $x + \Delta x$. Denn es wird, wenn man stat x sezt $x + \Delta x$; $y^{I} - y$ in $y^{II} - y^{I}$ verwandelt. Nun ist $y^{I} - y = \Delta y$, und $y^{II} - y^{I} = \Delta y^{I}$, folglich wird Δy^{I} aus Δy, wenn man $x + \Delta x$ stat x in Δy sezet. Diese Schlüsse lassen sich durch alle Glieder dieser Reihe der Differenzen fortsezen. Subtrahirt man in dieser Reihe der Differenzen wiederum ein jedes vorhergehendes Glied von dem unmittelbar folgenden, so ist auch hier das Resultat allemahl die Differenz des vorhergehenden Gliedes, und man bekomt eine zweyte Reihe von Differenzen, welche man die Differenzen der zweyten Ordnung nennen kan, und welche auf diese Art bezeichnet werden

$$\Delta\Delta y \text{ oder } \Delta^2 y = \Delta \overset{I}{y} - \Delta y$$

$$\Delta^2 \overset{I}{y} = \Delta \overset{II}{y} - \Delta \overset{I}{y}$$

$$\Delta^2 \overset{II}{y} = \Delta \overset{III}{y} - \Delta \overset{II}{y}$$

$$\Delta^2 \overset{III}{y} = \Delta \overset{IV}{y} - \Delta \overset{III}{y}$$

und so ferner. Es wird also $\Delta^2 y$ die zweyte Differenz der Funktion y, $\Delta^2 \overset{I}{y}$ die zweyte Differenz der Funktion $\overset{I}{y}$ u. s. w. heissen können. Auf änliche Art kan man fortgehen, und die Differenzen der dritten, vierten, fünften uud fernern Ordnungen suchen und so bezeichnen, wie der folgende Entwurf ausweiset.

Die veränderten Wehrte von x.

x; $x + \Delta x$; $x + 2\Delta x$; $x + 3\Delta x$; $x + 4\Delta x$; $x + 5\Delta x$; u. s. w.

Die Wehrte der Funktion y.

y ; $\overset{I}{y}$; $\overset{II}{y}$; $\overset{III}{y}$; $\overset{IV}{y}$; $\overset{V}{y}$; u. s. w.

Die Differenzen der ersten Ordnung.

Δy ; $\Delta \overset{I}{y}$; $\Delta \overset{II}{y}$; $\Delta \overset{III}{y}$; $\Delta \overset{IV}{y}$; u. s. w.

Die Differenzen der zweyten Ordnung.

$\Delta^2 y$; $\Delta^2 \overset{I}{y}$; $\Delta^2 \overset{II}{y}$; $\Delta^2 \overset{III}{y}$; u. s. w.

Die Differenzen der dritten Ordnung.

$\Delta^3 y$; $\Delta^3 \overset{I}{y}$; $\Delta^3 \overset{II}{y}$; u. s. w.

Die Differenzen der vierten Ordnung.

$\Delta^4 y$; $\Delta^4 \overset{I}{y}$; u. s. w.

Man

Man findet leicht, daß in einer jeden Reihe dieser Differenzen allemahl das folgende Glied aus dem unmittelbar vorhergehenden wird, wenn man in diesem $x + \Delta x$ stat x sezet. Und hieraus folgt, daß die zweyte Differenz einer Funktion y nichts anders ist, als die erste Differenz von Δy. Eben so ist $\Delta^3 y$ die erste Differenz von $\Delta^2 y$, $\Delta^4 y$ die erste Differenz von $\Delta^3 y$ u. s. w. Wer also nur die erste Differenz der Funktion y zu finden weis, der braucht keine weitere Regeln, die Differenzen der folgenden Ordnungen zu finden.

Diese Betrachtung sezt mich in den Stand, aus der algemeinen Formul für die erste Differenz einer Funktion y der veränderlichen Grösse x, welche diese war $\Delta y = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 +$ etc. eine algemeine Formul für die Differenz einer jeden Ordnung der Funktion y zu schliessen. Ich seze dabey nur dieses voraus, daß wenn eine veränderliche Grösse durch eine beständige Grösse ist multiplicirt worden, auch eben diese beständige Grösse die Differenz der veränderlichen multiplicire, so daß $\Delta\, ay = a\Delta y$ sey. Denn es ist $\Delta . ay = a(y + \Delta y) - ay = a\Delta y$. Nun ist Δx eine beständige Grösse, folglich $\Delta^2 y = \Delta P \times \Delta x + \Delta Q \times \Delta x^2 + \Delta R \times \Delta x^3 + \Delta S \times \Delta x^4 +$ etc. Es haben aber die Differenzen von P, Q, R, S, u. s. w, weil sie Funktionen von x sind, diese Form $\Delta P = p\Delta x, + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 +$ etc. $\Delta Q = \mathfrak{P}\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta x^2 + \mathfrak{R}\Delta x^3 + \mathfrak{S}\Delta x^4 +$ etc. $\Delta R = \mathfrak{p}\Delta x + \mathfrak{q}\Delta x^2 + \mathfrak{r}\Delta x^3 + \mathfrak{s}\Delta x^4$ etc. u. s. w. Da denn $p, q, r, s, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}$, u. s. w. wiederum gewisse Funktionen von x werden. Und hieraus erwächst diese Form der zweyten Differenz von y

$$\Delta^2 y = \begin{array}{l} p\Delta x^2 + q\Delta x^3 + r\Delta x^4 + s\Delta x^5 + \text{etc.} \\ \qquad\quad \mathfrak{P}\Delta x^3 + \mathfrak{Q}\Delta x^4 + \mathfrak{R}\Delta x^5 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad \mathfrak{p}\Delta x^4 + \mathfrak{q}\Delta x^5 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}$$

welche kürzer ausgedrükt werden kan, wenn der Coefficient von Δx^3 mit Z, der folgende von Δx^4 mit Y, und so

weiter, bezeichnet wird. Alsdenn iſt $\Delta^2 y = p\Delta x^2 + Z\Delta x^3 + Y\Delta x^4 + X\Delta x^5 +$ etc. Aus dieſer Gleichung folgt, es ſey $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = p + Z\Delta x + Y\Delta x^2 + X\Delta x^3 +$ etc. welches anzeigt, daß der Wehrt des Bruchs $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, oder der Exponent des Verhältniſſes $\Delta x^2 : \Delta^2 y$ kleiner wird, wenn Δx und folglich auch Δx^2 und $\Delta^2 y$ kleiner werden. Je kleiner Δx angenommen wird, deſto mehr nähert ſich der Wehrt des Bruchs $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ der Funktion p. Es kan aber niemahls, ſo lange Δx noch eine Gröſſe iſt, der Nahme des Verhältniſſes $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ der Funktion p gleich werden. Und eben daher iſt p die Gränze des Verhältniſſes $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, welcher ſich der Nahme dieſes Verhältniſſes immer nähert, und welche er doch nie erreicht, bis Δx und alſo auch Δx^2 und $\Delta^2 y = 0$ iſt. In dieſem Fall ſetzet man den Buchſtab d anſtat Δ, und es wird $\frac{ddy}{dx^2} = p$, weil alle übrige Glieder mit 0 multiplicirt ſind. Dieſe Gränze des Verhältniſſes $\Delta x^2 : \Delta\Delta y$ ſucht man eigentlich in der ſo genanten Differentio-Differential-Rechnung. Die zweyte Differenz $\Delta^2 y$ wird eigentlich nicht geſucht, denn dieſe iſt $= 0$, wenn ſie das Differentio-Differentiale von y heiſt, welches ſo wohl aus der Gleichung $\Delta^2 y = p\Delta x^2 + Z\Delta x^3$ u. ſ. w. erhellet, als auch aus der Art, wie dieſe Differenz entſtehet.

Es ist ja $\Delta^2 y = \Delta y^1 - \Delta y$. Wenn aber $\Delta x = 0$, so ist $\Delta y^1 = 0$ und $\Delta y = 0$, folglich $\Delta^2 y = 0 - 0 = 0$.

Alle diese Schlüsse sind nöhtig, wenn man die eigentliche wahre Absicht der Differentio-Differential-Rechnung recht deutlich kennen lernen wil. Man sucht eigentlich nur die Funktion $p = \frac{ddy}{dx^2}$. Diese aber zu finden, hat man nicht nöhtig, alle die weitläuftigen Rechnungen würklich anzustellen, welche die obigen Formuln verlangen. Unter der Bedingung, daß $\Delta x = 0 = dx$ sey, ist $ddy = dP \times dx + dQ \times dx^2 + dR \times dx^3 + dS \times dx^4 +$ etc. und $dP = pdx$, folglich $ddy = pdx^2 + dQ \times dx^2 + dR \times dx^3 + dS \times dx^4 +$ etc. und auch aus dieser Formul folgt die Gleichung $\frac{ddy}{dx^2} = p$, weil $dQ, dR \times dx$, und alle folgende Glieder 0 sind. Man findet also eben die Gleichung $\frac{ddy}{dx^2} = p$, oder $ddy = pdx^2$, wenn man $dy = Pdx$ nach den gewöhnlichen Regeln differentiiret, und dx als eine beständige Grösse betrachtet. Und in diesem Verstande ist das Differentio-Differentiale einer Funktion y einerley mit dem ersten Differential von dem ersten Differential der Funktion y.

Die dritte Differenz von y ist die erste Differenz von $\Delta\Delta y$, und nun wird es keine Schwierigkeit mehr haben, für diese dritte Differenz $\Delta^3 y$ eine allgemeine Formul zu finden. Weil $\Delta\Delta y = p\Delta x^2 + Z\Delta x^3 + Y\Delta x^4 + X\Delta x^5 +$ etc. so ist $\Delta^3 y = \Delta p \times \Delta x^2 + \Delta Z \times \Delta x^3 + \Delta Y \times \Delta x^4 + \Delta X \times \Delta x^5 +$ etc. Es ist abar $\Delta p = \pi\Delta x + \varrho\Delta x^2 + \sigma\Delta x^3 + \tau\Delta x^4 +$ etc. $\Delta Z = \Gamma\Delta x +$

$\mathfrak{Q}\Delta x^2 + \mathfrak{R}\Delta x^3 + \mathfrak{S}\Delta x^4 +$ etc. $\Delta Y = p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 +$ etc. Die Buchstaben $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, p, q, r, s$, bedeuten hier wieder gewisse Funktionen von x, aber nicht eben diejenigen, welche sie vorhin anzeigten. Also erhält man diese algemeine Formul

$$\Delta^3 y = \begin{array}{l} \pi\Delta x^3 + \varrho\Delta x^4 + \sigma\Delta x^5 + \tau\Delta x^6 + \text{etc.} \\ \quad + \mathfrak{P}\Delta x^4 + \mathfrak{Q}\Delta x^5 + \mathfrak{R}\Delta x^6 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + p\Delta x^5 + q\Delta x^6 + \text{etc.} \end{array}$$

oder wenn hier die Coefficienten von Δx^4, Δx^5, u. s. w. mit $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}$, u. s. w. bezeichnet werden, so ist $\Delta^3 y = \pi\Delta x^3 + \mathfrak{Z}\Delta x^4 + \mathfrak{Y}\Delta x^5 + \mathfrak{X}\Delta x^6 +$ etc. und also $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \pi + \mathfrak{Z}\Delta x + \mathfrak{Y}\Delta x^2 + \mathfrak{X}\Delta x^3 +$ etc. woraus sich ergiebt, daß π die Gränze des Verhältnisses $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$ sey, so daß, wenn $\Delta x = 0 = dx$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = \pi$. Und eben diese Funktion π ist es, welche man verlangt, wenn das Differential der dritten Ordnung von y gesucht wird. Unter der Bedingung, daß $\Delta x = 0 = dx$, ist $d^3 y = dp \times dx^2 + dZ \times dx^3 + dY \times dx^4 +$ etc. $= \pi dx^3 + dz \times dx^3 + dY \times dx^4 +$ etc. weil $dp = \pi dx$. Aber auch aus dieser Formul folgt die Gleichung $\frac{d^3 y}{dx^3} = \pi$ oder $d^3 y = \pi dx^3$, und dies ist eben diejenige, welche gefunden wird, wenn man die Gleichung $ddy = pdx^2$ differentiiret, und dabey dx als eine beständige Grösse ansiehet.

Diese

Diese Betrachtungen führen natürlich auf die Vermuthung, daß die Differenz einer jeden Ordnung der Funktion y diese Form habe $\Delta^n y = Pdx^n + Qdx^{n+1} + Rdx^{n+2} + Sdx^{n+3} +$ etc. so daß die Coefficienten P, Q, u. s. w. gewisse Funktionen von x sind, und dx der Kürze halber stat Δx stehet. Man kan die Richtigkeit dieser Formul auf folgende Art beweisen. Ich behaupte, wenn diese Formul für die Differenz der Ordnung n gilt, so hat die Differenz der Ordnung n+1 eben die Form. Die Differenz der Ordnung n+1 ist die erste Differenz von der Differenz der Ordnung n. Hat also die Differenz der Ordnung n diese Form $\Delta^n y = Pdx^n + Qdx^{n+1} + Rdx^{n+2} + Sdx^{n+3} +$ etc. so ist $\Delta^{n+1} y = \Delta P dx^n + \Delta Q dx^{n+1} + \Delta R dx^{n+2} + \Delta S dx^{n+3} +$ etc. Es ist aber $\Delta P = pdx + qdx^2 + rdx^3 + sdx^4 +$ etc. $\Delta Q = \mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dx^2 + \mathfrak{R}dx^3 + \mathfrak{S}dx^4 +$ etc. u. s. w. und also

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1} y = {} & pdx^{n+1} + qdx^{n+2} + rdx^{n+3} + sdx^{n+4} + \text{etc.} \\ & + \mathfrak{P}dx^{n+2} + \mathfrak{Q}dx^{n+3} + \mathfrak{R}dx^{n+4} + \text{etc.} \\ & \mathfrak{p}dx^{n+3} + \mathfrak{q}dx^{n+4} + \text{etc.} \\ & \text{etc.} \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Dies ist aber eben die Form, welche für die Differenz der Ordnung n angenommen ward. Sie gilt für die Differenz der ersten und zweyten Ordnung, daher mus sie auch für die Differenzen der dritten, vierten und folgenden Ordnungen gelten. Hieraus läst sich aber weiter schliessen, daß in einem jeden Fal der Bruch $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$, oder der Exponent des Verhältnisses $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ eine solche veränderliche Grösse sey, welche nach und nach kleiner wird, wenn die veränderliche Grösse Δx nach und nach abnimt. Die Grenze dieses Verhältnisses ist allemahl diejenige Funktion von x,

mit welcher Δx^n in der Formul für $\Delta^n y$ multiplicirt iſt. Und die Grenze dieſes Verhältniſſes $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ iſt dasjenige, was die Aufgabe verlangt, wenn man von der Funktion y das Differential der Ordnung n ſuchet. Unter der Bedingung, daß $\Delta x = o = dx$ ſey, iſt $d^{n+1}y = dPdx^n + dQdx^{n+1} + dRdx^{n+2} + dSdx^{n+3} +$ etc. $= pdx^{n+1} + dQdx^{n+1} + dRdx^{n+2} + dSdx^{n+3}$ etc. weil $dP = pdx$. Und hieraus folgt $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = p + dQ + dRdx + dSdx^2$ etc. $= p$, welche Gleichung gewöhnlich ſo ausgedrükt wird $d^{n+1} = pdx^{n+1}$. Die Regel iſt alſo algemein, daß das Differential der Ordnung $n+1$ einer Funktion y aus dem Differential der Ordnung n eben dieſer Funktion gefunden werde, wenn man dieſes Differential auf die gewöhnliche Art differentiiret, und dx als eine beſtändige Gröſſe betrachtet.

Ich werde bald von dieſer vorgetragenen Lehre einige Anwendungen machen, welche es beweiſen ſollen, wie vortreflich die Differentialrechnung mit den erſten und evidenteſten Grundſätzen der theoretiſchen Mathematik zuſammen hänge. Ich weis es, daß viele ſonſt würklich geſchickte Männer, denen man eine mehr als gemeine Kentnis der Mathematiſchen Wiſſenſchaften nicht abſprechen kan, in den Gedanken ſtehen, daß die Differentialrechnung eine Wiſſenſchaft ſey, die voller Geheimniſſe ſtekke; daß man viele Lehren, die in derſelben vorgetragen werden, zwar nicht läugnen, aber doch keine recht bündige Beweiſe davon führen könne. Ich läugne es nicht, daß die Art, wie dieſe Wiſſenſchaft in den meiſten Lehrbüchern vorgetragen wird, beſonders in denjenigen, welche in Teutſchland am meiſten bekant ſind, mir im Anfange eben dieſe Gedanken beygebracht habe. Allein je weiter ich der Sache nachgedacht habe,

habe, desto mehr vortrefliche Ordnung, und augenscheinliche Deutlichkeit habe ich in dieser vorzüglich schönen Erfindungskunst wahrgenommen. Ich finde nirgends mehr etwas geheimnisvolles, sondern es hänget alles mit den ersten Anfangsgründen ganz vortreflich zusammen.

Ich habe schon verschiedene mahl mich dahin erkläret, daß nach meiner Einsicht eine Nul unmöglich grösser und noch vielweniger unendliche mahl grösser als die andre seyn könne, obgleich dieses nicht hindert, daß durch den Bruch $\frac{0}{0}$ ein jedes Verhältnis angezeiget werden könne. Ich habe bewiesen, daß vermöge der allerersten mathematischen Grundsätze der Bruch $\frac{a \rtimes 0}{b \rtimes 0} = \frac{0}{0} = \frac{a}{b}$ seyn müsse. Was wil diese Gleichung $\frac{0}{0} = \frac{a}{b}$ eigentlich sagen? Nicht dieses, daß sich würklich die eine 0 zur andern 0 verhalte, wie b zu a, so daß wenn z. E. $a = 3b$, die eine 0 dreymahl grösser als die andre sey. Der Ausdruk $a \rtimes 0$ zeigt an, daß a nach und nach kleiner werden und zulezt gar verschwinden sol. Eben diese Veränderung sol nach dem Ausdruk $b \rtimes 0$ mit der Grösse b vorgenommen werden. Der Ausdruk $\frac{a \rtimes 0}{b \rtimes 0}$ zeigt an, daß a und b beide zugleich gleichförmig abnehmen und zulezt gar verschwinden sollen. Und hieraus ergiebt sich die wahre Bedeutung der Formul $\frac{a \rtimes 0}{b \rtimes 0} = \frac{a}{b}$. Sie zeiget an, $\frac{a}{b}$ sey dasjenige Verhältnis, mit welchem die beyden Grössen a und b Nul werden. Und ist es nicht auch sonst aus den Anfangsgründen der Geometrie bekant, daß zwey Grössen, wenn sie gleichförmig zugleich wachsen oder abnehmen, beständig eben dasselbe Verhältnis

gegen einander behalten? Dies Verhältnis $\frac{a}{b}$ ist also nicht dasjenige, was zwischen a und b stat findet, wenn sie schon Nul geworden sind, sondern dasjenige, worin sie sich während ihres gleichförmigen Abnehmens beständig befinden, und mit welchem sie Nul werden. Warum ist also die Gleichung $\frac{3 \times 0}{0} = \frac{4 \times 0}{0}$ falsch? Der Ausdruk $\frac{3 \times 0}{0}$ oder $\frac{3 \times 0}{1 \times 0}$, weil $3 = \frac{3}{1}$, zeigt das Verhältnis an, mit welchem die Glieder des Verhältnisses $\frac{3}{1}$ nach und nach gleichförmig zugleich abnehmen, und zulezt verschwinden, und der Ausdruck $\frac{4 \times 0}{0}$ oder $\frac{4 \times 0}{1 \times 0}$ das Verhältnis, womit die Glieder des Verhältnisses $\frac{4}{1}$ auf eben die Art verschwinden.

Der Beweis davon, daß 0^2 unendliche mahl kleiner sey, als 0, wird aus dem Begrif der Multiplication dem ersten Ansehen nach ganz richtig so geführt: es verhalte sich $1 : 0 = 0 : 0^2$, weil nun 0 unendliche mahl kleiner sey, als 1, so müsse auch 0^2 unendliche mahl kleiner als 0 seyn. Und ich kan den ganzen Beweis zugeben, wenn man nur hier den Begrif von der Multiplication blos auf die Zeichen einschränkt, da hier die beyden Zeichen 0 und 0, welche man in einander multiplicirt, ja keine Grössen ausdrükken. Der Sinn kan kein andrer als dieser sein: man soll ein Zeichen finden, welches geschikt ist, das Verhältnis $1 : 0$ auszudrükken, wenn man dieses Zeichen anstat der 0, und die 0 stat der 1 sezet, und hiezu ist allerdings das Zeichen 0^2 geschikt. Denn es ist würklich $\frac{1}{0} = \frac{0}{0^2}$. Allein ist denn dieses das Verhältnis der beyden Nullen 0 und 0^2 gegeneinander? Nein, man mus sich vielmehr die Sache

so vorstellen. Es ist x^2 eine solche Funktion von x, welche kleiner wird, wenn x nach und nach abnimt, und das Verhältnis $x^2 : x$ ändert sich, wenn die veränderliche Grösse x geändert wird, und zwar so, daß dieses Verhältnis grösser wird, wenn x abnimt. Der Wehrt des Bruchs $\frac{x}{x^2}$, oder der Nahme des Verhältnisses $x^2 : x$ wird also desto grösser seyn, je kleiner x angenommen wird, bis er zulezt unendlich ist, wenn $x = 0$ wird. Hieraus folgt, daß das Verhältnis, mit welchem die Grössen x^2 und x Nul werden, ein unendliches Verhältnis sey; oder mit andern Worten: Das unendliche Verhältnis $0^2 : 0$ ist die Grenze des Verhältnisses $\frac{x}{x^2}$, dem sich dieses immer nähert, je kleiner x angenommen wird, aber nicht erreicht, bevor x überal verschwindet. Vielleicht würden auch die Schwierigkeiten in den Rechnungen mit den Grössen, die unendlich gros sind, alle gehoben seyn, wenn man auch hier die wahre und eigentliche Bedeutung der Zeichen sorgfältiger aufsuchte.

Man lehret, daß, wenn zu einer unendlichen Grösse eine endliche Grösse, welche man wil, addirt, oder davon subtrahirt werde, es so gut sey, als wenn man gar nichts dazu addirt oder subtrahirt hätte. Man lehrt, es sey $\infty + b = \infty$, weil $\frac{\infty + b}{\infty} = 1 + \frac{b}{\infty} = 1$ sey, folglich das Verhältnis $\infty + b : \infty$, ein gleiches Verhältnis seyn müsse. Das Verhältnis $\frac{\infty + b}{\infty}$ ist allerdings ein gleiches Verhältnis. Ich werde davon bald ein mehreres sagen, wenn ich vorher gewisse Schwierigkeiten angemerkt habe, welchen die Gleichung $\infty + b = \infty$ unterworfen ist.

iſt. Man kan nicht läugnen, daß auch $\infty = \infty$ ſey, und daraus wird, wenn man ∞ von beyden Seiten ſubtrahirt, $b = 0$, welches nicht ſtat haben kan. Die gewöhnliche Art, womit man dieſe Schwierigkeit hebet, iſt dieſe: Man ſpricht, es folge aus dieſen Schlüſſen nicht, daß b für ſich betrachtet gleich 0 ſey, ſondern nur dieſes, daß b in Anſehung des unendlichen gleich 0 ſey. Sol dieſes ſo viel heiſſen, es ſey b in Anſehung des ∞ eben ſo gros, als 0 in Anſehung eben deſſelben ∞; ſo mus man zugeben, es ſey $b : \infty = 0 : \infty$, und dieſe Proportion iſt unmöglich richtig. Denn es würde daraus folgen, daß $b\infty = 0\infty$ ſey. Es iſt aber $b\infty$ eine unendliche und 0∞ eine endliche Gröſſe. Ich glaube nicht, daß man nöhtig hat, ſich auf die Beantwortung dieſer Schwierigkeiten einzulaſſen. Ich würde nicht weitläuftig dagegen diſputiren, wenn gleich jemand die Gröſſen $\infty + b$ und ∞ für ungleich ausgeben wolte, weil ihre Differenz nicht $= 0$ ſondern $= b$ iſt. Ich würde die Sache ſo vortragen. Es iſt $x + b$ eine Funktion von x, und x verhält ſich zu $x + b = 1 : 1 + \frac{b}{x}$, oder es iſt $\frac{x+b}{x} = 1 + \frac{b}{x}$. Der Exponent dieſes Verhältniſſes nähert ſich der 1 immer mehr, je gröſſer x angenommen wird, und wenn $x = \infty$, ſo iſt $\frac{x+b}{x} = \frac{\infty + b}{\infty} = 1 + \frac{b}{\infty} = 1$. Folglich iſt die Grenze des Verhältniſſes $\frac{x+b}{x}$, der ſich daſſelbe immer nähert, je gröſſer x angenommen wird, und doch nicht erreicht, bevor x unendlich wird, die ratio æqualitatis. Hiebey wird aber vorausgeſezt, daß $\frac{\infty}{\infty} = 1$ ſey, und dies findet nicht alle-

mahl

mal stat. Dieser Bruch $\frac{\infty}{\infty}$ kan einen jeden endlichen Wehrt haben. Und wenn gleich jemand behaupten wolte, daß alle unendliche Zahlen einander gleich wären; so müste er doch vermöge der allerersten Mathematischen Grundsätze zugeben, daß $\frac{a:o}{b:o} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{a}{b}$ sey. Der Ausdruk $\frac{a}{o}$ zeigt an, daß a nach und nach grösser, und zulezt unendlich werden sol. Eben diese Veränderung sol nach dem Ausdruk $\frac{b}{o}$ mit der Grösse b vorgenommen werden. Der Ausdruk $\frac{a:o}{b:o}$ zeigt an, daß a und b beyde zugleich gleichförmig wachsen, und zulezt unendlich werden sollen, daß also die wahre Bedeutung der Gleichung $\frac{a:o}{b:o} = \frac{a}{b}$ diese ist, $\frac{a}{b}$ sey dasjenige Verhältnis, mit welchem die beyden Grössen a und b unendlich werden, weil zwey Grössen, welche gleichförmig zugleich wachsen, beständig eben dasselbe Verhältnis gegen einander behalten. Es würde aus dieser Ursache unstreitig besser seyn, wenn $\frac{1}{o}$ nur mit dem Zeichen ∞ angezeiget würde; alsdenn wäre $\frac{a}{o} = a \times \infty$, $\frac{b}{o} = b \times \infty$, u. s. f. Hieraus erhellet, daß die Grenze des Verhältnisses $\frac{ax+b}{x}$, wenn x unendlich wird, nicht die ratio æqualitatis sey, sondern es ist 1 : a von diesem Verhältnis die Grenze, weil $\frac{ax+b}{x} = a + \frac{b}{x}$,

und

und alſo $\frac{a\infty + b}{\infty} = a + \frac{b}{\infty} = a$. So iſt auch 1:

$\frac{a}{c}$ die Grenze des Verhältniſſes $\frac{ax+b}{cx}$. Die endlichen Gröſſen, welche von dieſen limitibus rationum die Exponenten abgeben, ſind es allein, welche in den calculis in Betracht kommen, eben ſo, wie die Exponenten derjenigen Verhältniſſe, mit welchen die zwey Glieder eines Verhältniſſes o werden. Und wenn die Rechnungen mit den infinite magnis ſo angeſehen werden, ſo verſchwinden alle auch nur ſcheinbare Schwierigkeiten. Eben die Schlüſſe, womit man beweiſet, daß $\infty + b = \infty$ ſey, werden auch gebraucht, darzuthun, daß überhaupt $\infty^n + \infty^{n-1} + \infty^{n-2} + \infty^{n-3} +$ etc. $= \infty^n$ ſey, wenn n eine poſitive ganze Zahl iſt, weil $\frac{\infty^n + \infty^{n-1} + \infty^{n-2} + \infty^{n-3} + \text{etc.}}{\infty^n} = 1 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} + \frac{1}{\infty^3}$ etc. $= 1$ iſt. So iſt $\infty^2 + \infty = \infty^2$, daraus aber kan man weiter ſchlieſſen, weil auch $\infty^2 = \infty^2$, daß $\infty = 0$ ſey, welches noch weniger als $b = 0$ beſtehen kan. Solte man der Regel: infinite magna inferiorum ordinum præ infinite magnis ſuperium ordinum evaneſcunt, nicht überal entbehren können? Ich glaube es allerdings. Es iſt $\frac{\infty^n + \infty^{n-1} + \infty^{n-2} + \infty^{n-3} + \text{etc.}}{\infty^n}$ die Grenze des Verhältniſſes $\frac{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ex^{n-3} + \text{etc.}}{fx^n}$, der ſich dieſes Verhältnis, wenn x beſtändig wächſt, immer nähert, und wenn x unendlich iſt; ſo wird

$a\infty^n$

$$\frac{a\infty^n + b\infty^{n-1} + c\infty^{n-2} + e\infty^{n-3} + \text{etc.}}{f\infty^n} = \frac{a}{f}.$$

Der Exponent dieser lezten Verhältnis, die endliche Grösse $\frac{a}{f}$, wird vornemlich in solchen Rechnungen gesucht, wo das ∞ in Betracht komt. Man kan sich eben diese Sache auch noch anders vorstellen, und doch damit zu einem und eben demselben Zweck kommen. Wenn man eine Grösse mit ∞ dividirt, so ist es eben so gut, als wenn man mit $\frac{1}{\infty}$ oder mit o multiplicirt. Daraus folgt, daß $\frac{a\infty^n}{b\infty^n}$ $= a\infty^n \times \frac{1}{b\infty^n} = a\infty^n \times \frac{o^n}{b}$ allemahl einer endlichen Grösse $\frac{a}{b}$ gleich sey. Dagegen ist jederzeit $\frac{a\infty^n}{b\infty^{n+m}} = \frac{a}{b\infty^m} = \frac{a\infty^n}{b} \times o^{n+m} = \frac{a}{b} \times o^m$ $= o$, wenn n und m positive ganze Zahlen sind. Ich glaube nicht, daß man mehrer Regeln benöthigt ist, wenn man wissen wil, wie mit dem unendlichen in den Rechnungen mus umgegangen werden, und wil zu dem Ende in einem Exempel zeigen, was man für Vortheile hat, wenn man von der gewöhnlichen Art des Vortrages etwas abgehet.

Es sey y eine Funktion von x, und man setze stat x nach und nach die arithmetische Reihe $x + \triangle x$, $x + 2\triangle x$, $x + 3\triangle x$, etc. so daß man folgende Reihe der Wehrte von y bekömt, $y, \overset{I}{y}, \overset{II}{y}, \overset{III}{y}, \overset{IV}{y}, \overset{V}{y}$, etc.; so werden den

Wehr-

Wehrten von x	Diese Wehrte der Funktion y.
x	$y = y$
$x + \Delta x$	$\overset{I}{y} = y + \Delta y$
$x + 2\Delta x$	$\overset{II}{y} = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$
$x + 3\Delta x$	$\overset{III}{y} = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$
$x + 4\Delta x$	$\overset{IV}{y} = y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$
u. s. f.	u. s. f.

respondiren. Bezeichnen wir überhaupt ein jedes Glied der Reihe der Wehrte von y, dessen Index n ist, wenn das erste nicht mitgezehlet wird, mit $\overset{N}{y}$, und welches also aus y entstehet, wenn man $x + n\Delta x$ stat x setzet, so wird

$$\overset{N}{y} = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 y + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\Delta^4 y + \ldots\ldots + \frac{n.n-1.n-2\ldots\ldots n-n+1}{1.2.3.4\ldots\ldots n}\Delta^n y.$$

Man kan sich durch folgende Schlüsse überzeugen, daß diese Formul algemein wahr sey. Ich nehme an, es sey diese Formul wahr für $\overset{N}{y}$, und beweise, wenn sie von einem Termino dieser Reihe gilt, daß sie auch für dem nechstfolgenden gelte. Sie gelte also für den Terminum, dessen Index r ist, wenn man den ersten nicht mitzehlt; so ist dieser Terminus rtus =

$$\frac{n.n-1.n-2\ldots\ldots\ldots n-r+1}{1.2.3.4\ldots\ldots r}\Delta^r y,$$ und

es

es wird nach der Formul für $\overset{N}{y}$ der Terminus (r+1)tus dieser seyn $\frac{n.n-1.n-2\ldots\ldots n-r}{1.2.3.4\ldots\ldots r+1}\Delta^{r+1}y$. Eben derselbe Ausdruk aber wird gefunden, wenn man in der Formul für den Terminum r anstat r substituirt r+1. Daher ist die Formul für den Terminum r algemein, wenn die Reihe $\overset{N}{y}$ wahr ist. Ich behaupte ferner, wenn die Formul, die für $\overset{N}{y}$ angenommen worden, wahr ist; so gilt sie auch von $\overset{N+1}{y}$, und schliesse so. Es entsteht $\overset{N+1}{y}$ aus $\overset{N}{y}$, wenn man allenthalben $y+\Delta y$ stat y, $\Delta y+\Delta^2 y$ stat Δy, $\Delta^2 y+\Delta^3 y$ stat $\Delta^2 y$, u. s. f. setzet. Wenn dies geschicht, so entstehen zwey Reihen, nemlich

$$\text{I. } y+\frac{n}{1}\Delta y+\frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 y+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 y$$
$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\Delta^4 y+\text{etc.}$$

$$\text{II. } +\Delta y+\frac{n}{1}\Delta^2 y+\frac{n.n-1}{1.2}\Delta^3 y$$
$$+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^4 y+\text{etc.}$$

deren Summe die Reihe $\overset{N+1}{y}$ giebt. Es ist also der Terminus (r+1)tus der Reihe $\overset{N+1}{y}$ = Termino (r+1)to der Reihe I + Termino rto der Reihe II. Nun ist aber der Terminus (r+1)tus der Reihe I.

$$=\frac{n.n-1.n-2.n-3\ldots\ldots n-r}{1.2.3.4\ldots\ldots r+1}\Delta^{r+1}y,$$

und

und von eben der Reihe der Terminus rtus

$$= \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \ldots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r} \Delta^r y$$

und davon ist die Differenz = dem Termino rto der Reihe II.

$$= \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \ldots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r} \Delta^{r+1} y$$

daraus folgt, daß der Terminus (r+1)tus der Reihe $\overset{N+1}{y}$ seyn müsse

$$= \left(\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r+1} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r} \right) \Delta^{r+1} y$$

$$= \left(\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r} \times \frac{n-r}{r+1} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r} \times \frac{1}{1} \right) \Delta^{r+1} y$$

$$= \left(\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r} \times \frac{n-r}{r+1} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r} \times \frac{r+1}{r+1} \right) \Delta^{r+1} y$$

$$= \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r} \times \frac{n+1}{r+1} \Delta^{r+1} y$$

$$= \frac{n+1 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r \cdot r+1} \Delta^{r+1} y.$$

Sezt

Sezt man aber in der Formul des Termini (r+1)ti der Reihe $\overset{N}{y}$ allenthalben n+1 stat n, so findet man eben den Ausdruk, und daraus erhellet, daß die gefundene Formul, wenn sie für $\overset{N}{y}$ wahr ist, auch für $\overset{N+1}{y}$ wahr seyn müsse. Sie ist aber für $\overset{I}{y}$ und $\overset{II}{y}$ wahr; dies beweiset die Induktion. Daher ist sie auch wahr für $\overset{III}{y}$, $\overset{IV}{y}$, und alle folgende Glieder.

Aus dieser Formul,

$$\overset{N}{y} = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 y + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\Delta^4 y + \ldots\ldots + \frac{n.n-1.n-2\ldots\ldots n-n+1}{1.2.3.4\ldots\ldots n}\Delta^n y,$$

würde sich allemahl der veränderte Wehrt von y finden lassen, welcher entsteht, wenn man x + nΔx stat x setzet, unter der Bedingung, daß man die endlichen Differenzen der Funktion von y einer jeden Ordnung finden könte. Es läst sich aber diese Formul noch bequemer einrichten, wenn man folgende Betrachtungen zu Hülfe nimt. Man setze $n\Delta x = b$, so ist $n = \frac{b}{\Delta x}$, und folglich n eine Funktion von Δx, welche grösser wird, wenn Δx abnimt, und unendlich ist, wenn $\Delta x = o = dx$. So bald aber $\Delta x = o = dx$ angenommen wird, so ist auch $\Delta y = o = dy$.

ſetzen alſo in der Formul ∞ ſtat n, dy ſtat Δy, ddy ſtat $\Delta^2 y$, u. ſ. f.; ſo wird $\overset{N}{y} = y + \frac{\infty}{1} dy + \frac{\infty . \infty - 1}{1 . 2 .} ddy + \frac{\infty . \infty - 1 . \infty - 2}{1 . 2 . 3} d^3 y + \frac{\infty . \infty - 1 . \infty - 2 . \infty - 3}{1 . 2 . 3 . 4 .} d^4 y$ + etc. Nun iſt $dy = pdx$, $ddy = qdx^2$, u. ſ. f. und daher hat ein jeder Terminus dieſer Reihe, deſſen Index r iſt, wenn der erſte nicht mitgezehlet wird, folgende Form $\frac{\infty^r - f\infty^{r-1} + g\infty^{r-2} - \ldots \pm h\infty}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots \ldots r} \times sdx^r$. Es iſt aber $(\infty^r - f\infty^{r-1} + g\infty^{r-2} - \ldots \pm h\infty) \times sdx^r = \infty^r sdx^r - f\infty^{r-1} sdx^r + g\infty^{r-2} sdx^r$ etc. $= \infty^r sdx^r - 0 + 0 - 0 + 0$ etc. $= \infty^r sdx^r$. Daher iſt ein jeder Terminus indicis r $= \frac{\infty^r sdx^r}{1 . 2 . 3 \ldots . r} = \frac{\infty^r d^r y}{1 . 2 . 3 \ldots . r}$. Nun war $\infty = \frac{b}{dx}$, alſo iſt $\infty^r = \frac{b^r}{dx^r}$, folglich iſt der Terminus generalis dieſer Reihe $\frac{b^r d^r y}{1 . 2 . 3 \ldots r . dx^r}$. Dieſes giebt der ganzen Reihe dieſe Form $\overset{N}{y} = \frac{bdy}{1 . dx} + \frac{b^2 ddy}{1 . 2 . dx^2} + \frac{b^3 d^3 y}{1.2.3.dx^3} + \frac{b^4 d^4 y}{1 . 2 . 3 . 4 . dx^4}$ + etc. Und das iſt der Wehrt der Funktion y, welchen ſie bekomt, wenn in derſelben $x + b$ ſtat

stat x gesezt wird. Ein Beyspiel, welches so wohl den Nuzen, als auch die wahre Beschaffenheit der gesamten Differentialrechnung sehr deutlich zeiget. Was sind die Brüche $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. f. anders, als die Grenzen der Verhältnisse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, u. s. f.? Und keine andre, als diese endliche Grössen, werden bey Auflösung ähnlicher Aufgaben gesucht. Man würde eben die Form für den Terminum generalem gefunden haben, wenn man $\infty = \infty - 1 = \infty - 2 = \infty - 3 = \infty - 4$ u. s. f. angenommen hätte. Allein wenn ich mich nicht auf die andre Art davon überzeugen könte, daß die gefundene Formul ihre Richtigkeit hätte, so würde mir noch immer ein geheimer Zweifel übrig bleiben, ob dieses auch ohne alle Gefahr zu irren angenommen werden könne, da man doch zugeben mus, daß die Grössen $\infty - 1$, $\infty - 2$, $8 - 3$, u. s. f. nicht in ratione æqualitatis arithmetica sind. Sind alle diese Schlüsse richtig; sind sie augenscheinlich richtig, und nach der grösten Strenge wahr; so haben die Gleichungen der gemeinen Analysis vor den Differential-Gleichungen gar keinen Vorzug. Man darf diese lezte Art der Gleichungen nicht für solche halten, worin keine völlige Gleichheit der Glieder, sondern nur eine tendentia ad æqualitatem stat findet.

Es ist bewiesen, daß die Funktion y der veränderlichen Grösse x, wenn in derselben stat x gesezet wird $x + b$, diesen Wehrt bekomt $y + \frac{bdy}{1.dx} + \frac{b^2 ddy}{1.2.dx^2} + \frac{b^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{b^4 d^4y}{1.2.3.4.dx^4} +$ etc. Schreibt man also Δx stat b,

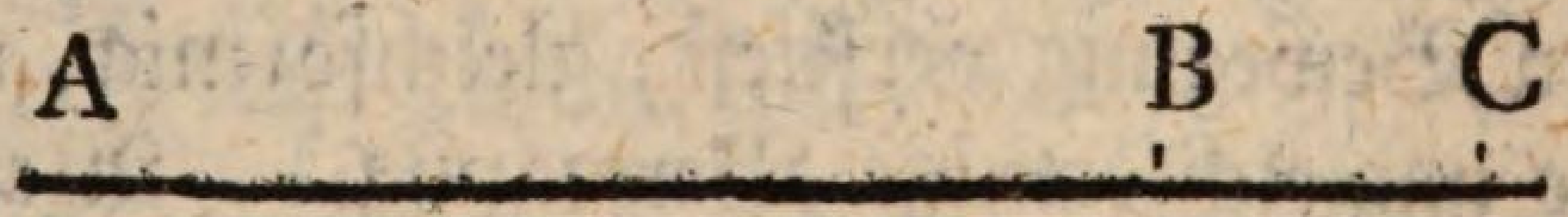
und bezeichnet den Wehrt von y, wenn $x + \Delta x$ ſtat x geſetzet wird, mit $\overset{1}{y}$, wie vorhin, ſo iſt $\overset{1}{y} = y + \frac{\Delta x\, dy}{1 . dx} + \frac{\Delta x^2\, ddy}{1 . 2 . dx^2} + \frac{\Delta x^3\, d^3y}{1 . 2 . 3 . dx^3} + \frac{\Delta x^4\, d^4y}{1 . 2 . 3 . 4 . dx^4}$ etc. Sezt man alſo $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{ddy}{dx^2} = q$, $\frac{d^3y}{dx^3} = r$, $\frac{d^4y}{dx^4} = s$, u. ſ. f.; ſo wird $\overset{1}{y} = y + p\Delta x + \frac{1}{2} q\Delta x^2 + \frac{1}{6} r\Delta x^4 + \frac{1}{24} s\Delta x^4 +$ etc. und alſo $\Delta y = \overset{1}{y} - y = p\Delta x + \frac{1}{2} q\Delta x^2 + \frac{1}{6} r\Delta x^3 + \frac{1}{24} s\Delta x^4 +$ etc. und dieſe Formul zeiget, wie man auf eine leichte Art durch Hülfe der eigentlich ſo genanten Differentialrechnung die endliche Differenz von y finden kan. Ich habe oben die algemeine Formul $\Delta y = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 +$ etc. angenommen, und die jezt gefundene Gleichung weiſet, daß in dieſer Formul $P = p$, $Q = \frac{1}{2} q$, $R = \frac{1}{6} r$, u. ſ. w. ſey.

Ich wil von dieſen Gedanken einige Anwendungen auf die erſten Grundſätze der Mechanik machen. Wem iſt es unbekant, daß dieſe vortrefliche Wiſſenſchaft faſt auf den höchſten Gipfel ihrer Volkommenheit geſtiegen iſt, nachdem man angefangen hat, die Differential- und Integralrechnung darauf anzuwenden? Und iſt es nicht eben ſo bekant, daß vielen die erſten Grundſätze davon, welche die neuern Annalyſten annehmen, eben deswegen verdächtig ſcheinen, weil es das Anſehen hat, als wenn ſie wider die augenſcheinlichſten Wahrheiten der reinen Geometrie verſtoſſen? Wenn ein Körper in Bewegung iſt, ſo verflieſt während der Bewegung allemahl eine gewiſſe Zeit, und man

man sucht vornemlich in einem jeden Zeitpunkt die Richtung und die Geschwindigkeit, des sich bewegenden Körpers. Ist die Richtung eines Körpers, der sich bewegt, beständig einerley, so bewegt sich der Körper in einer geraden Linie. Ist die Geschwindigkeit während seiner Bewegung beständig eben dieselbe, so ist diese Bewegung gleichförmig. Die Bewegung der Theile eines Körpers kan von der Bewegung des ganzen Körpers unterschieden seyn, und man mus die Bewegung aller Puncte, die man sich in einem Körper vorstellen kan, kennen, wenn man von der Bewegung des ganzen volständig urtheilen wil. Darum fängt man die Mechanik mit der Betrachtung der Bewegung so kleiner Körper an, die man sich als Punkte vorstellen mus, damit es nicht nöhtig ist, die Bewegung der Theile in denselben von der Bewegung des ganzen zu unterscheiden. Und wenn ein solcher Punkt in Bewegung ist, so ist der Raum, welchen es durchläuft, eine Linie. Aendert der bewegte Punkt beständig seine Richtung, so ist kein Theil dieser Linie gerade, und also der Raum, durch welchen der Punkt läuft, eine krumme Linie. Aendert der Punkt während seiner Bewegung auch beständig seine Geschwindigkeit, so ist die Bewegung desselben in keinem Theil der Zeit, welche während der Bewegung verfliest, gleichförmig, und sie heist alsdenn eine ungleichförmige Bewegung. Wenn sich ein Punkt A durch die Linie AB = S gleichförmig bewegt, und

es verfliest während der Bewegung die Zeit T, so mus er in gleichen Theilen dieser Zeit T gleiche Theile des Raums S durchlaufen, so daß wenn z. e. der Punkt *A* nach C in der Zeit t gekommen, und man AC = s sezt, allemahl diese Proportion stat findet t : T = s : S, und folglich $\frac{s}{t} = \frac{S}{T}$ ist. Der Bruch $\frac{s}{t}$ ist also in der gleichförmigen Bewegung einer beständigen Grösse. Und wenn

die Länge von s nach dem gewöhnlichen Längenmaas durch Füsse, und t in Sekunden ausgedrükt wird, so zeigt der Quotient $\frac{s}{t}$ an, wie viele Fus des Raums der Punkt A in einer Sekunde Zeit durchläuft, wenn er sich gleichförmig bewegt. Dies ist die gewöhnliche Art, die Geschwindigkeit zu messen. Wenn ein Punkt A in einer Minute einen doppelt so grossen Raum durchläuft, als ein andres Punkt B in eben der Zeit, so läuft A nochmahl so geschwinde als B, so daß überhaupt in gleichen Zeiten die Geschwindigkeiten sich wie die Räume verhalten, wenn sich zwey oder mehr Punkte gleichförmig bewegen. Weil der Bruch $\frac{s}{t}$ bey der gleichförmigen Bewegung eine beständige Grösse ist, so sezt man $\frac{s}{t} = c$, so daß c die Geschwindigkeit ausdrükt, und es wird $s = ct$, folglich der Raum eine gewisse Funktion der Zeit seyn. Es sey A von A nach B in der Zeit t angelanget, so daß $AB = s$, und es wachse t



um die Differenz Δt, so wird auch $AB = s$ um die Differenz $BC = \Delta s$ anwachsen, so daß $\Delta s = c\Delta t$, und $\frac{\Delta s}{\Delta t} = c$. Man stelle sich Δt nach und nach kleiner vor, so mus auch Δs proportionirlich und zwar so abnehmen, daß allemahl $\frac{\Delta s}{\Delta t} = c$ bleibet, was auch Δt für einen Wehrt bekömt. Dies Verhältnis mus also auch dasjenige seyn, mit welchem Δt und zugleich $\Delta s = 0$ werden,

den, so daß $\frac{ds}{dt} = c$, weil Δt und Δs gleichförmig zugleich abnehmen. Oder mit andern Worten: auch die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ drükt die Geschwindigkeit aus, mit welcher das Punkt A sich durch BC $= \Delta s$ gleichförmig bewegt.

Wenn die Bewegung des Punks A durch die Linie AC ungleichförmig ist, und in keinem Theil der Zeit die Geschwindigkeit von A eben dieselbe bleibt, sondern dieser Punkt A bald geschwinder, bald langsamer fortgehet, so ist es nicht möglich, seine Geschwindigkeit überhaupt anzugeben. Sondern man kan nur sagen, wie geschwinde er sich in jedem Augenblik der Zeit bewege, oder indem er sich in diesem oder einem andern Punkt seines Weges befindet. Es bewege sich also der Punkt A in der Linie AC so ungleichförmig, als man wil, und gehe bald geschwinder, bald langsamer fort, doch aber so, daß gar kein Theil der Zeit, es sey so klein, als es wolle, angegeben werden kan, worin der Punkt A mit einerley Geschwindigkeit fortgehet; denn sonst würde seine Bewegung nicht durchgängig ungleichförmig seyn: man sol die Geschwindigkeit finden, welche der Punkt A in B hat. Diese zu finden, schliesse ich so. Es wird eine gewisse Zeit verflossen seyn, indem der Punkt von A nach B fortgegangen ist. Es sey diese Zeit $= t$, und die Grösse dieser Zeit wird von der Grösse des Raums AB $= s$ abhängen, so daß t eine Funktion von s ist, und umgekehrt s eine Funktion von t. Es verfliesse noch eine gewisse Zeit Δt, und in derselben wird A von B aus weiter fortgerükt seyn, und man setze, er gehe in der Zeit Δt fort, bis nach C, so ist BC $= \Delta s$. Es sey die Geschwindigkeit von A in dem Punkt B $= u$, so würde, wenn A von B nach C gleichförmig fortginge, und die Geschwindigkeit u nach Ver-

fließſung der Zeit Δt nur einen Zuwachs bekäme, dieſe Geſchwindigkeit $u = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ſeyn. Je kleiner Δt angenommen wird, deſto weniger weicht die Gleichung $u = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ von der Wahrheit ab. Sie iſt aber nach aller Strenge wahr, wenn man $\Delta t = 0 = dt$ annimt, denn alsdann hat u noch gar keinen Zuwachs bekommen. Nun iſt aber auch $\Delta s = 0 = ds$, und alſo die geſuchte Geſchwindigkeit von A in dem Punkt B, nemlich $u = \frac{ds}{dt}$. Die Gleichung $u = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ würde nach aller Strenge richtig ſeyn, wenn man nur annehmen könte, daß u ſo lange Δt dauret gar nicht geändert würde, und dies iſt in der gröſten Schärfe wahr, wenn man $\Delta t = 0 = dt$ annimt, und daher hat die Gleichung $u = \frac{ds}{dt}$ in der gröſten Strenge ihre Richtigkeit. Hat man alſo wohl nöhtig, in der Mechanik anzunehmen, daß in einem ſo genanten unendlich kleinen Theil der Zeit, der doch würklich noch eine Zeit ſeyn wird, wenn man ihn nicht der Strenge nach $= 0$ ſezt, die ungleichförmige Bewegung gleichförmig ſey? Oder hat man nöhtig, zu ſagen, daß zwiſchen den beyden Gliedern der Gleichung $u = \frac{ds}{dt}$ nicht eine wahre Gleichheit, ſondern nur eine tendentia ad æqualitatem ſtat finde. Beydes iſt unnöhtig. Die Gleichung $u = \frac{ds}{dt}$ iſt nach der gröſten Schärfe wahr. Wenn der Punkt A durch die Linie AC ſich ungleichförmig bewegt, ſo iſt ſeine Geſchwindigkeit in

jedem

jedem Punkt B seines Weges die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Das heist, wenn man die Zeit t durch Zeitsekunden, und s durch Füsse, Zolle, oder ein andres Längenmas ausdrükt, so giebt die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die Anzahl der Füsse, oder Zolle, welche der Punkt A in einer Sekunde durchlaufen würde, wenn er mit eben der Geschwindigkeit, welche er in B hat, fortginge. Ist der Weg, durch welchen der Punkt A fortgehet, eine krumme Linie, so wird gewöhnlich angenommen, daß der Theil dieses Weges, welchen der Punkt A in der unendlich kleinen Zeit dt zurük leget, eine grade Linie sey, und man stelt sich die krumme Linie als eine gebrochene Linie vor, welche aus lauter kleinen Theilen bestehet, deren jeder eine unendlich kleine grade Linie ist. Diese Voraussetzung darf keinesweges angenommen werden, und sie ist würklich falsch, wenn diese unendlich kleinen Theile noch würklich ausgedehnte Linien seyn sollen. Man nimt an, daß die Bewegung gleichförmig sey, so lange der Punkt A sich in einer solchen kleinen graden Linie befindet, und auch diese Voraussetzung ist falsch, wenn diese kleine Linien noch würklich ausgedehnte Linien seyn sollen. Indessen sind doch die Grundsäze der Mechanik, welche daraus geschlossen werden, in der grösten Schärfe wahr, weil in den gewöhnlichen Schlüssen im Grunde nichts anders angenommen wird, als daß die Grössen, welche man unendlichklein nennt, der Strenge nach $= 0$ sind. Ich wil dieses in der folgenden Abhandlung beweisen.

Beweis
des neuen Grundsatzes der Mechanik
$$2Mdds = \pm Pdt^2,$$
welchen Herr Euler im VI. Theil der Histoire de l'Academie de Berlin bekant gemacht hat.

Die Mechanik ist bisher noch nicht eine so volkommen ausgearbeitete Wissenschaft gewesen, daß keine mechanische Aufgabe vorkommen kan, für welche man nicht solte die Fundamental-Gleichung finden können. Es zeigen sich schon Schwierigkeiten bey solchen Aufgaben, welche die Bewegung eines Punkts, wenn derselbe durch gewisse gegebene Kräfte getrieben wird, betreffen. Und diese Schwierigkeiten häuffen sich gar sehr, wenn man von der Bewegung solcher Körper, welche eine bestimte Masse und Figur haben, urtheilen sol, da die Richtungen der Kräfte, welche auf solche Körper würken, so ungemein verschieden sein können. Herr Euler hat in der angezeigten Schrift den Analysten den Weg gewiesen, wie die gesamte Mechanik, sowohl der festen und weichen, als auch der flüssigen Körper, auf einen einzigen so algemeinen und brauchbaren Grundsatz gebracht werden kan, daß für eine jede mechanische Aufgabe, durch Anwendung desselben, wenigstens die Fundamental-Gleichungen gefunden werden. Eine Mechanik also, die man auf diesen Grundsaz bauete, würde ohne alle Mängel seyn. Und wenn man gleich von gewissen Aufgaben die völlige Auflösung nicht würklich finden solte, so würde dieser Mangel der völligen Auflösung nicht der Mechanik, sondern der noch nicht bis zur grösten Volkommenheit

heit ausgearbeiteten Integralrechnung zur Last gelegt werden müssen. Ist ein fester Körper in einer solchen Bewegung, daß alle seine Punkte in Ansehung des absoluten Raums immer einerley Lage behalten; so darf man nur die Bewegung eines seiner Punkte wissen, um von der Bewegung des ganzen urtheilen zu können, weil die Geschwindigkeit und Richtung aller Punkte einerley ist. Ausser dieser Bewegung, da der ganze Körper von einem Ort zum andern fortgehet, kan derselbe auf unzählige andere Arten bewegt werden. Es kan seyn, daß wenn ein Punkt dieses Körpers in Ruhe ist, die übrigen alle sich um diesen Punkt bewegen, und alsdenn werden so wenig die Geschwindigkeiten, als die Richtungen aller Punkte einerley seyn. Diese Art der Bewegung kan mit der Bewegung des ganzen Körpers, da derselbe von einem Ort zum andern fortgehet, verbunden seyn. Allein obgleich diejenige Art der Bewegung des Körpers, da alle Puncte desselben sich um einen einzigen drehen, welchen man sich ruhend vorstellet, gar sehr unterschieden seyn kan; so hat man doch sonst nur eine Art dieser Bewegungen in der Mechanik vornemlich betrachtet, weil es an den Gründen gefehlet hat, auch auf die übrigen die Rechnungen anzuwenden. Und diese Art ist diejenige, da der Körper sich um eine Achse drehet, welche unbeweglich angenommen wird, wenn der Körper seinen absoluten Ort nicht ändert, oder doch allemahl mit sich selbst parallel bleibet, wenn der ganze Körper fortgehet. Diese Axe des Körpers ist allemahl eine grade Linie, welche durch den Mittelpunkt der Schwere desselben gehet. Herr Euler beweiset, daß der Mittelpunkt der Schwere des Körpers allemahl in Ruhe ist, die Bewegung der Theile des Körpers mag so verschieden seyn, als sie wolle, wenn man sich nemlich den Körper im ganzen betrachtet, in Ruhe vorstellet. Es wird aber auch bey eben dieser Bewegung allemahl in einem jeden Augenblik der Zeit eine grade Linie, welche durch den Mittelpunkt der Schwere gehet, für diesen Augenblik in Ruhe seyn. Und also komt alle Verschiedenheit bey dieser Bewegung, ausser der verschiedenen

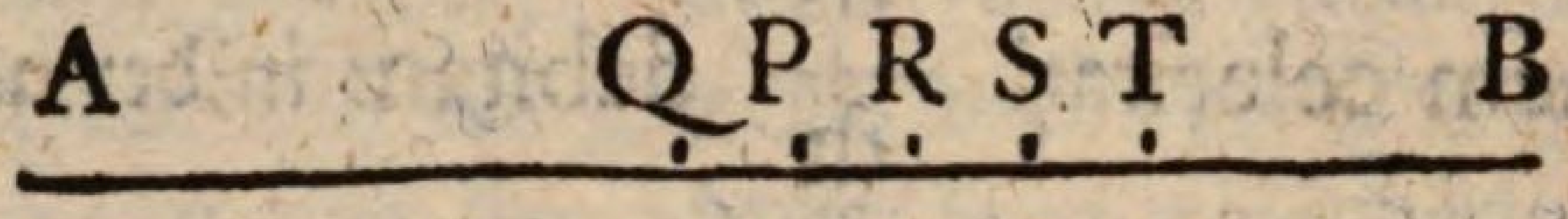
nen Geschwindigkeit der Theile, auf die veränderliche Lage dieser Axe an. Die sonst bekanten Grundsäze der Mechanik sind nicht hinreichend, die Bewegung eines festen Körpers um eine Axe, deren Lage sich jeden Augenblik ändert, zu bestimmen. Herr Euler hat alle diese Grundsäze auf einen einzigen, und zwar so algemeinen Grundsaz gebracht, daß darauf die ganze Mechanik und alle übrige Wissenschaften, welche von der Bewegung der Körper von allen Arten handeln, sich gründen: und er bauet darauf in der angezeigten Abhandlung die Theorie von der Bewegung der festen Körper um eine Axe, deren Lage veränderlich ist. In dieser Abhandlung hat Herr Euler von dem Grundsaz, welchen er annimt, keinen weitläuftigen Beweis gegeben. Es ist aber auch nicht das erstemahl, daß dieser grosse Erfinder aus diesem wichtigen Grundsaz schliest. Im dritten Theil der vortreflichen Schriften der Berlinschen Akademie braucht Herr Euler schon eben diesen Grundsaz in einer Abhandlung von der Theorie der Bewegung der grossen Himmelskörper, und zeiget daselbst schon in einer Anwendung dieses Grundsazes auf die Theorie von der Bewegung der Körper, welche beständig gegen einen bestimten Punkt getrieben werden, die grossen Vortheile, welche man von dem Gebrauch dieses Grundsazes auch in der Theorie von der Bewegung der Punkte zu gewarten hat, besonders wenn die Linie, welche der Punkt durchläuft, nicht in einer und eben derselben Fläche liegt. Hier leitet Herr Euler eben diesen algemeinen Grundsaz, aus der in der Mechanik sonst bekanten Gleichung her: $du = pdt$, in welcher p die potentiam acceleratricem, und u die Geschwindigkeit bedeutet. Weil nemlich $u = \frac{ds}{dt}$, wenn s den Raum bedeutet, welchen ein Punkt in der Zeit t zurük leget, so ist $du = \frac{dds}{dt}$, und also $dds = pdt^2$. Sezt man die po-

tentiam

tentiam motricem $= P$ und die Masse des Punkts $= M$, so ist $p = \frac{P}{M}$, und folglich $dds = \frac{P}{M} dt^2$, oder $Mdds = Pdt^2$. Die Ursache, warum $Mdds$ mit 2 multiplicirt ist, zeigt Herr Euler nur kurz an, weil $\frac{ds^2}{dt^2}$ die altitudinem celeritati $\frac{ds}{dt}$ debitam in der algemeinen Formul ausdrükke. Es verdienet dieser Grundsaz die Aufmerksamkeit aller Analysten, wenn er würklich einen so algemeinen und wichtigen Nutzen hat. Ich habe mich mit dem grösten Vergnügen durch die Anwendung desselben auf die wichtigsten bekanten Aufgaben davon überzeuget, und finde, daß er aus den ersten Begriffen, welche man in der Mechanik annimt, durch folgende Schlüsse hergeleitet werden kan, welche herzusetzen ich um so mehr bewogen bin, da man bey dem Gebrauch dieses Grundsatzes der übrigen, welche in der Mechanik sonst bekant sind, und oft zu sehr verwikkelten Rechnungen führen, alle entbehren kan. Man kan sie, wenn man wil, auch aus diesem Grundsaz mit leichter Mühe herleiten, wie ich in der Folge zeigen werde. Ich merke nur noch an, daß Herr Euler von eben diesem Grundsaz in seiner Theoria Motus Lunæ einen vortreflichen Gebrauch gemacht habe.

Die beyden Hauptgesetze der Natur liegen zum Grunde: Ein Körper, welcher in Ruhe ist, bleibet allemahl in Ruhe, wo nicht eine Kraft auf ihn würkt, und ihn in Bewegung setzet; und ein Körper, welcher in Bewegung ist, bleibet in Bewegung, und behält einerley Richtung und Geschwindigkeit, wo keine Kraft auf ihn würkt, und seine Bewegung ändert, oder ihn in Ruhe sezt. Vermöge dieser beyden Grundsätze stellet man sich bey den Körpern eine beson-

sondre Kraft vor, welche beständig bemühet ist, sie in dem ihnen einmahl beygebrachten Zustande der Ruhe oder Bewegung zu erhalten, und nennet sie **die Kraft der Trägheit**, oder besser, die **Verbleibungskraft.** Ich nehme überdem den Unterscheid der **absoluten** und **relativen Kräfte**, deren erstere auf einerley Art, leztere aber auf verschiedene Art in ruhende und sich bewegende Körper würken, als bekant an, und rede in der Folge nur von absoluten Kräften.



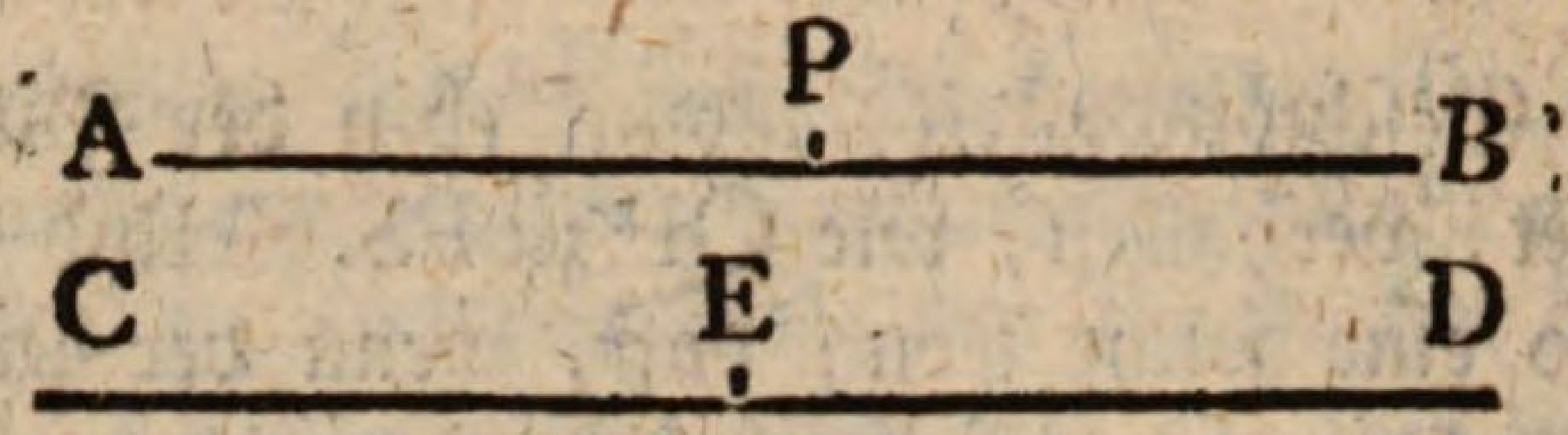
Es bewege sich also ein Punkt in der graden Linie AB. Er sey in der Zeit t durch AP = s fortgegangen, und bewege sich in der Zeit Δt gleichförmig durch den folgenden Theil PR = Δs. Ist eben dieser Punkt in der vorhergehenden Zeit Δt durch QP gleichförmig fortgegangen, und ist QP = PR = Δs, und findet dieses in allen Theilen der Linie AB stat, so ist die Bewegung desselben durch AB gleichförmig, und die blosse Verbleibungskraft ist hinreichend, das Punkt in dieser Bewegung zu erhalten. Ist aber der Punkt in der vorhergehenden Zeit Δt durch QP, und in der folgenden Zeit = Δt durch PS gleichförmig fortgegangen, so daß PS > PQ; so ist der Punkt nicht durch die blosse Verbleibungskraft von P nach S fortgetrieben, sondern die Verbleibungskraft hat ihn in der Zeit Δt nur durch den Weg PR = QP forttreiben können, und daher ist die Bewegung dieses Punkts durch RS = PS — PR = $\Delta\Delta s$ die Würkung von einer Kraft, welche in P auf den Punkt gewürket, und durch den Weg RS in der Zeit Δt nach der Richtung PB fortgetrieben hat. Wir wollen diese Kraft mit P bezeichnen, und so wird diese Kraft P auch einen Punkt, welcher in R ruhet, in der Zeit Δt durch den Raum RS forttreiben, weil P eine absolute Kraft ist. Ich nehme hiebey an, daß die Bewegung des Punkts sowohl durch den Weg QP, als auch durch den Weg PS gleichförmig ist, und alsdenn wird sich die Geschwindigkeit

in

in QP zur Geschwindigkeit, womit eben der Punkt durch PS fortgehet, verhalten, wie QP zu PS. Und die Kraft P wird also eine solche seyn, daß, wenn der Punkt in Q ruhete, und sie in Q auf ihn würkte, dieselbe eben diesen Punkt in eine solche Bewegung setzte, worin er vermöge seiner Verbleibungskraft nunmehro mit der Geschwindigkeit

$\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t}$ fortgehen würde. Wenn der bewegte Punkt

überdem noch von einer andern Kraft, so der vorigen P gleich wäre, nach eben der Richtung PB fortgetrieben würde, so würde dieser Punkt auch von eben dieser Kraft in eben der Zeit Δt durch einen Weg fortgetrieben werden, welcher dem Weg RS $= \Delta\Delta s$ gleich wäre. Und da die Würkung der einen Kraft die Würkung der andern unter dieser Bedingung keineswegs aufhält; so werden beyde Kräfte zusammen genommen, oder auch eine Kraft, welche $=$ 2P, diesen bewegten Punkt durch einen Weg, der $=$ 2RS in eben der Zeit Δt forttreiben. Ist also dieser Punkt in der Zeit Δt durch QP $= \Delta s$ fortgegangen, und er wird in P von einer Kraft $=$ 2P getrieben, so wird er in der folgenden Zeit Δt vermöge seiner Verbleibungskraft durch PR $=$ QP $= \Delta s$, und überdem durch RT $=$ 2RS fortgehen, so daß nunmehro $\Delta\Delta s =$ 2RS. Auf eben die Art erhellet, daß der bewegte Punkt, wenn er in P von einer Kraft $=$ 3P oder 4P, oder überhaupt nP getrieben würde, in der Zeit Δt ausser dem Weg PR, welchen er vermöge seiner Verbleibungskraft zurük leget, noch durch einen Weg $=$ 3RS, oder 4RS, oder überhaupt nRS fortgehen würde. Es ist also überhaupt $\Delta\Delta s =$ nRS, wenn der Punkt in P von einer Kraft $=$ nP getrieben würde, und daraus folgt, daß $\Delta\Delta s$ der Kraft, welche das bewegte Punkt in P treibt, proportional seyn werde. Wenn also ein Punkt A in der Linie



AB, ein andres C = A in der Linie CD sich bewegt; wenn A in P von einer Kraft P und C, wenn er in E angekommen, von einer Kraft Π getrieben wird, wenn überdem AP = s und CE = S, so ist $P : \Pi = \Delta\Delta s : \Delta\Delta S$, $= \frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} : \frac{\Delta\Delta S}{\Delta t^2}$, weil Δt eine beständige Grösse ist, und $P : \frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} = \Pi : \frac{\Delta\Delta S}{\Delta t^2}$. Wenn also $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} = nP$, so ist auch $\frac{\Delta\Delta S}{\Delta t^2} = n\Pi$, und die Zahl n ist allemahl von einer beständigen Grösse. Man kan den erwiesenen Saz auch so ausdrükken: wenn ein Punkt, daß sich durch AB bewegt, in P angelangt ist, und nun von einer Kraft P nach der Richtung PB fortgetrieben wird, so ist $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} = nP$ es mag die Kraft P eine Grösse haben, welche sie wolle. Man darf sonst die mitleren Glieder einer Proportion nur alsdann verwechseln, wenn alle vier Glieder derselben von einerley Art sind, und daher scheinet es hier ein Fehler zu seyn, weil die Kräfte und Linien nicht Grössen von einerley Art sind. Allein man darf sich nur daran erinnern, daß bey der würklichen Auflösung einer Aufgabe alle diese Grössen durch abstrakte Zahlen ausgedrükt werden, so wird dieser Zweifel verschwinden.

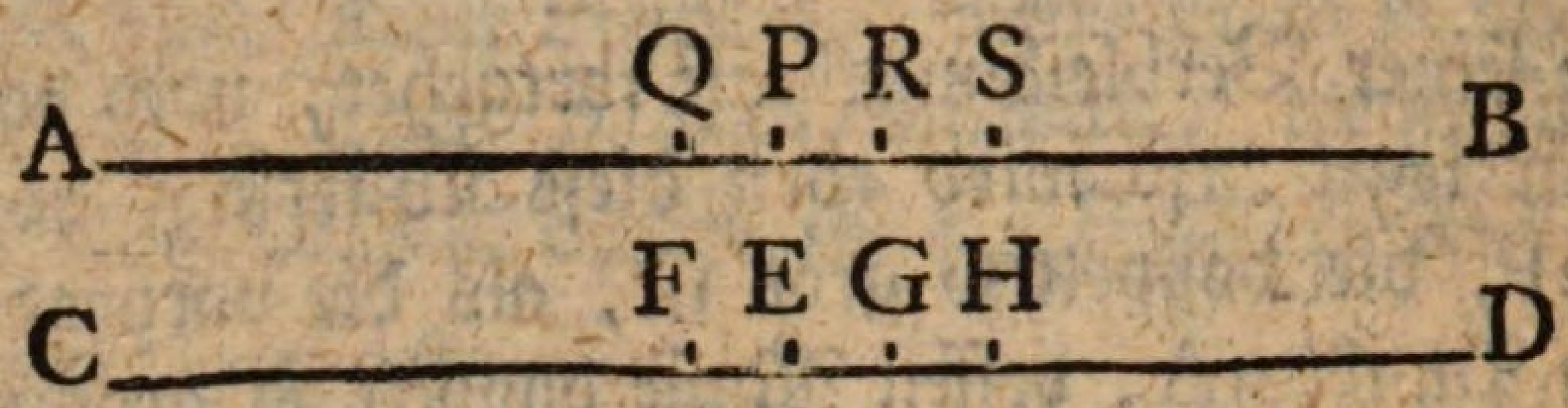
Wenn ein Punkt A sich durch die Linie AB beweget, und er ist nach geendigter Zeit t in P angekommen, so daß

AP

AP = s; wenn dieser Punkt A in P im Anfange der Zeit Δt durch eine Kraft P getrieben wird, welche es macht, daß der Punkt A ausser dem Wege PR, durch welchen er

vermöge seiner Verbleibungskraft fortgehet, noch den Weg RS zurük leget: so wird eben diese Würkung von einer Kraft 2P, die doppelt so gros ist, als die vorhergehende, in einem Punkt 2A, dessen Masse doppelt so gros ist, als die Masse des vorhergehenden, zu Stande gebracht werden. Die Kraft 2P wird den Punkt 2A, und überhaupt die Kraft mP den Punkt mA in der Zeit Δt durch den Raum RS forttreiben. Denn man darf sich nur vorstellen, daß ein jeder Theil A der Masse mA von einem Theil P der Kraft mP getrieben wird; so siehet man leicht, daß alle m Punkte zusammen genommen, von allen Kräften, deren jede gleich P, und deren Anzahl = m, zusammen genommen, eben so weit werden getrieben werden, als 1A von 1P. Treibt aber die Kraft mP den Punkt mA in der Zeit Δt durch den Weg RS; so wird die Kraft P den Punkt mA in der Zeit Δt durch den Weg $\frac{RS}{m}$ forttreiben, welches aus dem vorhin erwiesenen folgt. Denn es ist mP : P = RS : $\frac{RS}{m}$. Bleibt also die Kraft P eben dieselbe, und die Masse des Punkts mA wird grösser, so nimt der Wehrt von $\Delta\Delta s = \frac{RS}{m}$ in eben dem Verhältnis ab, und umgekehrt, wenn die Masse des Punks mA abnimt, so wächst der Wehrt von $\Delta\Delta s = \frac{RS}{m}$ in eben dem Verhältnis an. Und daraus folgt, daß wenn zwey unterschie-

dene Punkte von einer und eben derselben Kraft getrieben werden, die Massen dieser Punkte, und die Räume, welche sie in der Zeit Δt gleichförmig zurük legen, einander umgekehrt proportional sind. Wenn also ein Punkt A in der Linie AB, ein anderer C in der Linie CD sich bewegt;



wenn A in P von einer Kraft P, und C, wenn er in E angekommen, von einer Kraft $\pi = P$ getrieben wird, wenn überdem $AP = s$ und $CE = S$, so ist $\Delta\Delta s : \Delta\Delta S = C : A$, oder $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} : \frac{\Delta\Delta S}{\Delta t^2} = \frac{1}{A} : \frac{1}{C}$, weil Δt von einer beständigen Grösse ist, und $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} : \frac{1}{A} = \frac{\Delta\Delta S}{\Delta t^2} : \frac{1}{C}$. Ist also $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} = \frac{n}{A}$, so ist auch $\frac{\Delta\Delta S}{\Delta t^2} = \frac{n}{C}$, und n allemahl eine Zahl, die eine beständige Grösse hat, die Masse der Punkte mag so unterschieden seyn, als sie wolle. Drükt man also überhaupt die Masse eines Punkts durch M aus, so hat man die Gleichung $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} = \frac{n}{M}$, in welcher die Zahl n allemahl von einer beständigen Grösse ist.

Nun ist es leicht, eine Gleichung zu finden, welche überhaupt den Wehrt von $\Delta\Delta s$ giebt, wenn gleich die Kräfte sowohl als die Massen der Punkte unterschieden sind.

In

In dieser Absicht merke ich zuerst überhaupt folgendes an. Wenn die Kraft p auf ein Punkt a, und die Kraft q auf ein Punkt b würkt, so ist die Würkung in beyden Punkten einerley, wenn $p : q = a : b$. Denn es sey $q = mp$, so ist auch $b = ma$. Es hat aber die Kraft p in a mit der Kraft mp in ma einerley Würkung, wie vorhin schon angemerkt ist. Man setze nunmehro, es bewege sich der Punkt A in der Linie AB, und ein anderer Punkt C in der Linie CD; man setze ferner, in P würke eine Kraft P auf A nach der Richtung PB, und in E würke die Kraft Π auf C nach der Richtung ED; so ist $C : A = \Pi : \frac{A\Pi}{C}$, und es wird der Punkt C von der Kraft Π eben so stark getrieben, als der Punkt A von der Kraft $\frac{A\Pi}{C}$. Sezt man also stat C einen Punkt, welcher $= A$, so wird man stat Π eine Kraft setzen müssen, welche $= \frac{A\Pi}{B}$, und sodann hat man den Fal, da die Punkte gleich, und die Kräfte verschieden sind, folglich ist $\Delta\Delta s : \Delta\Delta S = P : \frac{A\Pi}{C}$, oder $\Delta\Delta s : \Delta\Delta S = \frac{P}{A} : \frac{\Pi}{C}$, und weil Δt eine beständige Grösse hat, so ist auch $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} : \frac{\Delta\Delta S}{\Delta t^2} = \frac{P}{A} : \frac{\Pi}{C}$, oder $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} : \frac{P}{A} = \frac{\Delta\Delta S}{\Delta t^2} : \frac{\Pi}{C}$. Wenn also $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} = \frac{nP}{A}$, so ist auch $\frac{\Delta\Delta S}{\Delta t^2} = \frac{n\Pi}{C}$, und man kan daher über-

haupt $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} = \frac{nP}{A}$ sezen, weil n eine Zahl ist, die immer eine beständige Grösse hat: oder auch $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} = \frac{nP}{M}$, wenn M die Masse des bewegten Punkts ausdrükt. Diese Gleichung ist richtig, wenn man nur annehmen kan, daß die Kraft P im Anfange der Zeit Δt nur auf den Punkt M würkt, und so lange die Zeit Δt währet, auf M weiter keine Würkung hat. Bey der ungleichförmigen Bewegung, wo die Kraft P beständig auf den Punkt M würket, kan dieses nicht angenommen werden, als nur unter der Bedingung, daß $\Delta t = 0 = dt$ sey, und alsdann wird $\frac{dds}{dt^2}$ aus $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2}$. Folglich ist bey der ungleichförmigen Bewegung in einem jeden Punkt des Weges, den der bewegte Punkt zurük leget $\frac{dds}{dt^2} = \frac{nP}{M}$, wenn s den würklich zurük gelegten Weg, und t die Zeit, welche während der Bewegung durch s verflossen ist, anzeiget. Und dieses ist der wichtige Eulerische Grundsaz der gesamten Mechanik. Ich wil die Grösse der Zahl n bald aufsuchen, und nur zuerst die sonst bekanten Grundsätze der Mechanik aus diesem algemeinen Grundsaz herleiten.

Wenn die Kraft P sowohl als die Masse M von einerley Grösse bleibt, so ist $\frac{dds}{dt^2} = n$, und $\frac{dds}{dt} = ndt$. Wird aber die Geschwindigkeit, welche der bewegte

wegte Punkt am Ende der Zeit t hat, mit c bezeichnet, so ist $c = \frac{ds}{dt}$, welches nach der grösten Schärfe wahr ist, wie ich bewiesen habe, folglich $dc = \frac{dds}{dt}$, und also $dc = ndt$, welches der Saz ist, daß die incrementa der Geschwindigkeiten den Zeiten, in welchen sie hervorgebracht werden, proportional sind. Ist die Kraft P veränderlich und M allein beständig, so wird $\frac{dds}{dt} = npdt$, das ist $dc = npdt$, weil $\frac{ds}{dt} = c$. Ist P beständig und M veränderlich, so wird $\frac{dds}{dt^2} = \frac{n}{M}$, und $\frac{dds}{dt} = \frac{ndt}{M}$, das ist $dc = \frac{ndt}{M}$, und auch dieser Saz gehöret in die Classe der sonst bekanten Mechanischen Gründe. Endlich wenn sowohl P als M veränderliche Grössen sind, so folgt aus der Gleichung $\frac{dds}{dt^2} = \frac{nP}{M}$ diese $\frac{dds}{dt} = \frac{nPdt}{M}$, das ist $dc = \frac{nPdt}{M}$, und dieser ist der algemeinste sonst gewöhnliche Mechanische Grundsaz, welcher gebraucht wird, wenn die Veränderung in der Geschwindigkeit bestimmet werden sol, wenn die Richtung der Kraft, welche die Veränderung wirket, einerley ist, mit der Richtung, nach welcher der bewegte Punkt schon fortgehet, und wird daher nur gebraucht, so lange die Bewegung gradlinicht ist. Wenn die Richtung der Kraft von der Richtung, mit welcher der bewegte Punkt schon fortgehet, abweichet, und die Bewegung krumlinicht wird, so kan man

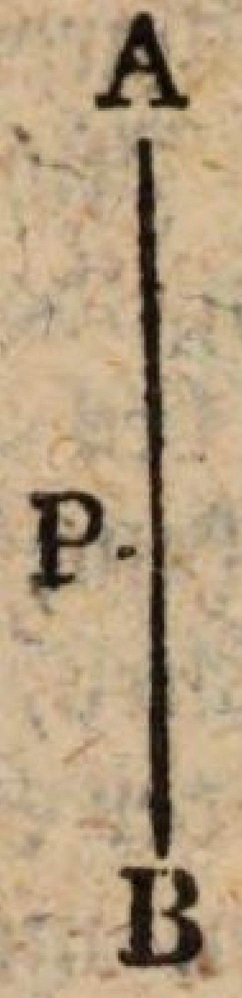
mit diesem Grundsaz $dc = -\frac{nPdt}{M}$ nicht mehr auskommen, sondern man braucht zwey andre, deren einer, die veränderte Geschwindigkeit, der andre die veränderte Richtung des bewegten Punkts bestimmet. Man bedarf dieser beyden leztern Grundsäze nicht, wenn man nur die Gleichung $\frac{dds}{dt^2} = -\frac{nP}{M}$ geschikt zu gebrauchen weis. Herr Euler hat den Analysten in den angeführten Abhandlungen den Weg gewiesen, und ich werde hier seiner Anweisung folgen, und versuchen, ob ich auf der Bahn fortgehen kan, die er gebrochen hat. Zuerst sol die Grösse der Zahl n aufgesucht werden, welche allemahl einerley bleibt, die Kräfte und Massen der Punkte mögen so verschieden seyn, als sie wollen.

Zu diesem Ende mus ein gewisses Maas für die Kräfte und für die Massen der Punkte angenommen werden, damit in bestimten Fällen stat der Buchstaben P und M bestimte Zahlen gesezt werden können. Wir haben kein bequemeres Maas der Kräfte, als die Gewichte der Körper. Es ist bekant, daß die bestimte Grösse der Schwere, welche den Körper unterwärts drükt oder zieht, wie man sich ausdrükken wil, sein Gewicht heist, und man kan sich die Grösse einer jeden gegebenen Kraft sehr deutlich vorstellen, wenn man an einen schweren Körper denkt, welcher eine eben so starke Bemühung hat, unterwärts zu fallen, als die gegebene Kraft hat, nach einer jeden andern Richtung; so, daß die gegebene Kraft, wenn ihre Richtung der Richtung des schweren Körpers grade entgegen gesezt wäre, denselben im Gleichgewicht erhalten könte. Nun drükt man die Gewichte durch Pfunde, Unzen, u. s. w. aus, und man kan daher alle andre Kräfte ebenfals durch Pfunde, Unzen, u. s. w. ausdrükken. Und wenn

man

man z. E. sagt, eine gegebene Kraft ist 100 Pfund gros, so bedeutet dies soviel, daß sie ein Gewicht von 100 Pfunden im Gleichgewicht erhalten kan, wenn sie mit demselben so verknüpft wird, daß ihre Richtung der Richtung des Gewichts grade entgegen gesezt ist. Es ist sonst bekant, daß die Massen der Körper sich wie ihre Gewichte verhalten, und dies ist die Ursache, warum man auch die Massen der Körper am besten ebenfals durch das Gewicht derselben messen kan. Doch mus man hiebey überhaupt anmerken, daß das Gewicht eines und eben desselben Körpers nicht nur in verschiedener Höhe von der Erde, sondern auch an verschiedenen Orten auf der Erdfläche veränderlich sey. Man mus also die schweren Körper, durch deren Hülfe die Kräfte so wohl, als die Massen der Körper sollen ausgemessen werden, sich einmahl an einem bestimten Ort auf der Erde, und zweitens in keiner grossen Entfernung von der Erde vorstellen. Wenn man also die Masse eines Körpers z. E. durch drey Pfund ausdrükt, so ist dies so zu verstehen: Der Körper würde an einem bestimten Ort auf der Erde, den man einmahl dazu erwehlt hat, drey Pfund wiegen. Der Weg s, welchen ein bewegtes Punkt zurük gelegt hat, wird durch das gewöhnliche Längenmas in Füssen, Zollen u. s. w. und die Zeit t am bequemsten in Zeitsekunden ausgedrükt. Und auf diese Art ist man im Stande in einem vorkommenden bestimten Fal die Buchstaben t, s, P, M, welche in der Gleichung $\frac{dds}{dt^2} = \frac{nP}{M}$ vorkommen, durch Zahlen auszudrükken.

Man hat aus sehr sorgfältig angestelten Versuchen geschlossen, daß die Schwere eine potentia absoluta sey, und daß auch die kleinsten Theile eines Körpers auf einerley Art von der Schwere getrieben werden. Es sey also



A ein Punkt, so von der Schwere in der graden Linie AB unterwärts getrieben wird, und der Punkt A sey in P angekommen, so wird die Geschwindigkeit c, welche er in P erreicht hat, auf diese Art gefunden. Man sezt AP = s, und die Zeit, welche während der Bewegung von A nach P verflossen ist = t, die Kraft der Schwere = P, und die Masse von A = M; so ist $\frac{dds}{dt^2} = \frac{nP}{M}$. Aber P und M werden jezt durch einerley Zahl ausgedrükt. Daher ist P = M, und $\frac{dds}{dt^2} = n$, folglich $\frac{dds}{dt} = ndt$, und also $dc = ndt$; weil $\frac{ds}{dt} = c$, woraus weiter folgt, daß $dt = \frac{ds}{c}$ sey: folglich $dc = \frac{nds}{c}$, oder $cdc = nds$, und $\frac{1}{2} cc = ns$. Bey dieser Integration und den gleich folgenden ist die beständige Grösse, die man sonst hinzu setzen müste = o, weil im Anfange der Bewegung in A, sowohl s als c = o ist. Es wird also $c = \sqrt{2ns}$, und wenn man sezt, es sey $n = \frac{1}{2}$, so wird $c = \sqrt{s}$. Ich mus untersuchen, in wie weit diese Voraussetzung bestehen kan, und schliesse demnach weiter aus der Gleichung $\frac{dds}{dt} = ndt$, daß $\frac{ds}{dt} = nt$, $ds = ntdt$, und also $s = \frac{1}{2} ntt$ sey. Man hat es durch die richtigsten Versuche ausgemacht, daß ein schwerer Körper, wenn er nahe bey der Erde unterwärts fält, in der ersten Zeitsekunde durch eine Höhe von 15625 Skrupel eines Rheinländischen Schuhes herunter falle. Wenn also in

in der Gleichung $s = \frac{1}{2} ntt$, $t = 1''$ gesezt wird, so ist $s = 15625''$ R. S. $= \frac{1}{2} n$, und daraus folgt, es sey $n = 31520$, unter der Bedingung, nemlich daß hinführo t allemahl in Zeitsekunden, und s in Skrupeln eines Rheinländischen Schuhes ausgedrükt wird. Unter dieser Bedingung ist also nicht $n = \frac{1}{2}$, und wil man also diesen sehr bequemen Wehrt $n = \frac{1}{2}$ beybehalten, so mus entweder s oder t durch eine andre Einheit ausgedrükt werden. Das Rheinländische Maas ist sehr bequem für die Rechnungen, weil 15625 eine volkommene Quadratzahl ist, nemlich 125^2. Es ist also am besten, daß eine andre Einheit erwehlt wird, die Zeit t auszudrükken, und man sieht leicht, daß diese kleiner seyn mus, als eine Zeitsekunde. Wenn ich diese $= \frac{1''}{x}$ seze, so wird sie müssen von der Beschaffenheit seyn, daß, wenn $t = 1'' = x$, und $n = \frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{2} ntt = 15625$ wird. Dies giebt die Gleichung $15625 = \frac{1}{4} x^2$, und daraus folgt $4 \times 15625 = x^2$, und $2 \times 125 = 250 = x$. Man mus also $\frac{1}{250}$ von einer Zeitsekunde für die Einheit annehmen, t durch eine Zahl auszudrükken, wenn $n = \frac{1}{2}$, und $c = \sqrt{s}$ beybehalten werden sol. Und dieses ist sehr bequem, man erhält dadurch eine neue Art die Geschwindigkeit überhaupt auszudrükken, nemlich durch die Quadratwurzel aus der Höhe, durch welche ein schwerer Körper herunter fallen mus, wenn er diesen bestimten Grad der Geschwindigkeit erreichen sol. Denn alle schwere Körper, wenn sie von einerley Höhe frey herunter fallen, erreichen einerley Grad der Geschwindigkeit, welches leicht aus den vorhin bewiesenen Säzen geschlossen wird. Denn es ist allemahl $c = \sqrt{2ns}$. Wenn also zwey unterschiedene Körper, der eine durch die Höhe s, der andre durch die Höhe S herunter fallen, so ist die Geschwindigkeit des ersten $c = \sqrt{2ns}$, und die Geschwindigkeit des andern $C = \sqrt{2nS}$, folglich $c : C = \sqrt{2ns} : \sqrt{2nS}$. Ist also $s = S$, so ist auch $c = C$. Ich kan also unter den festgesezten Bedingungen annehmen,

es sey $n = \frac{1}{2}$, und daher wird aus der algemeinen Gleichung $\frac{dds}{dt^2} = \frac{nP}{M}$ nunmehro diese $\frac{dds}{dt^2} = \frac{P}{2M}$, oder $2Mdds = Pdt^2$, welche ich habe beweisen wollen.

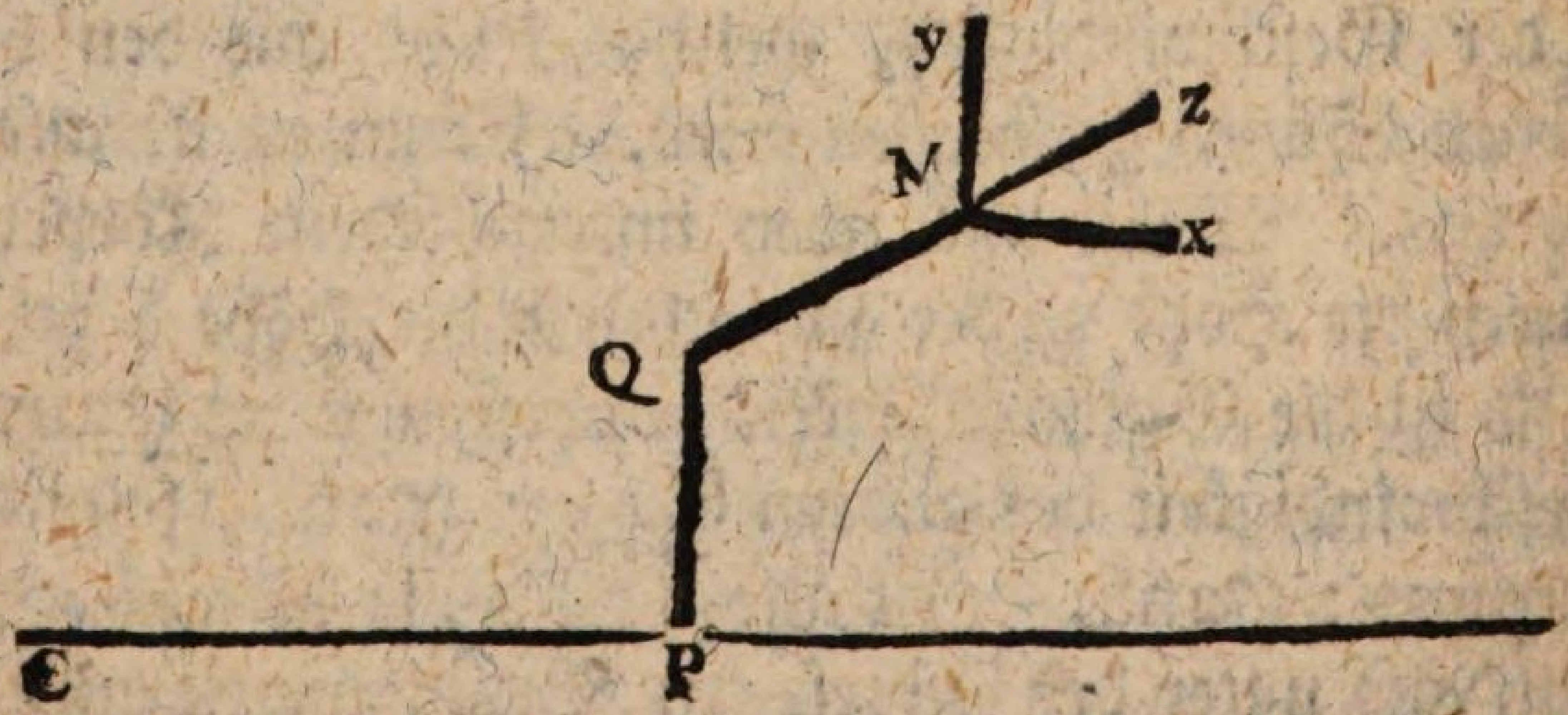
Nunmehro komt alles darauf an, daß man diese Formul geschikt zu gebrauchen weis. Herr Euler hat in den angemerkten Abhandlungen hiezu zwar eine algemeine Anleitung gegeben, die aber nur sehr kurz gefaßt ist. Indessen wenn man nur seinen Gedanken da, wo er diese Formul selbst angewendet hat, genau nachgehet; so kan man sich daraus algemeine Regeln abstrahiren, die den Gebrauch dieser Formul betreffen. Die algemeine Anleitung, welche Herr Euler selbst dazu gegeben hat, stehet am volständigsten im III. Theil der Histoire de l'Academie vom Jahr 1747, und ich wil sie ganz hersetzen.

Lehnsaz.

Ein Körper wird von gewissen gegebenen Kräften getrieben, man sol die Veränderung bestimmen, welche diese Kräfte in der Bewegung des Körpers in jedem Augenblik verursachen.

Auflösung.

Man beziehe die Bewegung des Körpers auf eine beliebige ebene Fläche CPQ, die man sich fest und unbeweglich vorstellen mus.



Man

Man ziehe auf diese Ebene von dem Körper Q die Perpendikullinie MQ. Man nehme ferner auf der Ebene CPQ nach belieben eine grade Linie CP für die Axe, und ziehe auf dieselbe von dem Punkt Q die Perpendikullinie QP. So wird auf jeden Augenblik die Lage des Körpers M durch die drey rechtwinklichte Coordinaten CP = x, PQ = y, QM = z bestimmet seyn. Es sey t die Zeit in welcher der Körper von einem bestimten Anfang seiner Bewegung bis nach M fortgegangen; und die gegebenen Kräfte, welche den Körper in M treiben, mögen eine Grösse und Richtung haben, welche sie wollen, so wird man sie allezeit in drey aequivalente Kräfte nach den beständigen Richtungen Mx, My und Mz resolviren können, die untereinander rechtwinklicht, und den dreyen Coordinaten x, y, z, parallel sind. Man setze diese drey potentias motrices Mx = X, My = Y, Mz = Z, und die Masse des bewegten Körpers = M, so sind die potentiæ acceleratrices Mx = $\frac{X}{M}$, My = $\frac{Y}{M}$ und Mz = $\frac{Z}{M}$. Nimt man nun das Element der Zeit dt constant an; so wird die Veränderung des Körpers in jedem Augenblik durch diese drey Gleichungen ausgedrükt werden:

$$\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{X}{M}; \quad \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M}; \quad \frac{2ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M};$$

woraus man den für jede verflossene Zeit t die Wehrte von x, y, z, und also den Ort, wo sich der Körper befindet, herleiten kan.

I. Zusaz.

Die Geschwindigkeit des Körpers nach der Richtung Mx wird = $\frac{dx}{dt}$ seyn, die Geschwindigkeit nach der

Rich-

Richtung My $= \frac{dy}{dt}$, und die Geschwindigkeit nach der Richtung Mz, ist $= \frac{dz}{dt}$, und zwar so, daß die Quadrate dieser Formuln, nemlich $\frac{dx^2}{dt^2}$; $\frac{dy^2}{dt^2}$; $\frac{dz^2}{dt^2}$; die altitudines his celeritatibus debitas ausdrükken, und aus dieser Ursache sind die Differentio-Differential-Formuln mit 2 multiplicirt.

II. Zusaz.

Wenn die Kräfte X, Y, Z, welche auf den Körper M würken, $= 0$ sind, so hat man diese Gleichungen

$$ddx = 0;\ ddy = 0;\ ddz = 0.$$

Wenn man diese integrirt, so wird, weil dt constant ist,

$$\frac{dx}{dt} = a;\ \frac{dy}{dt} = b;\ \frac{dz}{dt} = c;$$

und integrirt man weiter, so ist

$$x = at + \alpha;\ y = bt + \beta;\ z = ct + \gamma.$$

Daraus erhellet, daß die Geschwindigkeit des Körpers beständig, und der Weg, durch welchen der Körper fortgehet, eine grade Linie seyn wird, so wie es das erste Grundgesez der Mechanik verlangt.

III. Zusaz.

Die gefundenen Formuln beziehen sich auf diejenigen Richtungen der Kräfte, welche die Zeichnung vorstellet, nach welcher eine jede Kraft bemühet ist, den Körper nach der Richtung der respondirenden Coordinate zu treiben. Wenn also eine oder die andre von diesen dreyen Kräften den Körper nach der entgegengesezten Richtung treibt; so wird sie in der

der Berechnung für eine negative Grösse zu nehmen seyn.

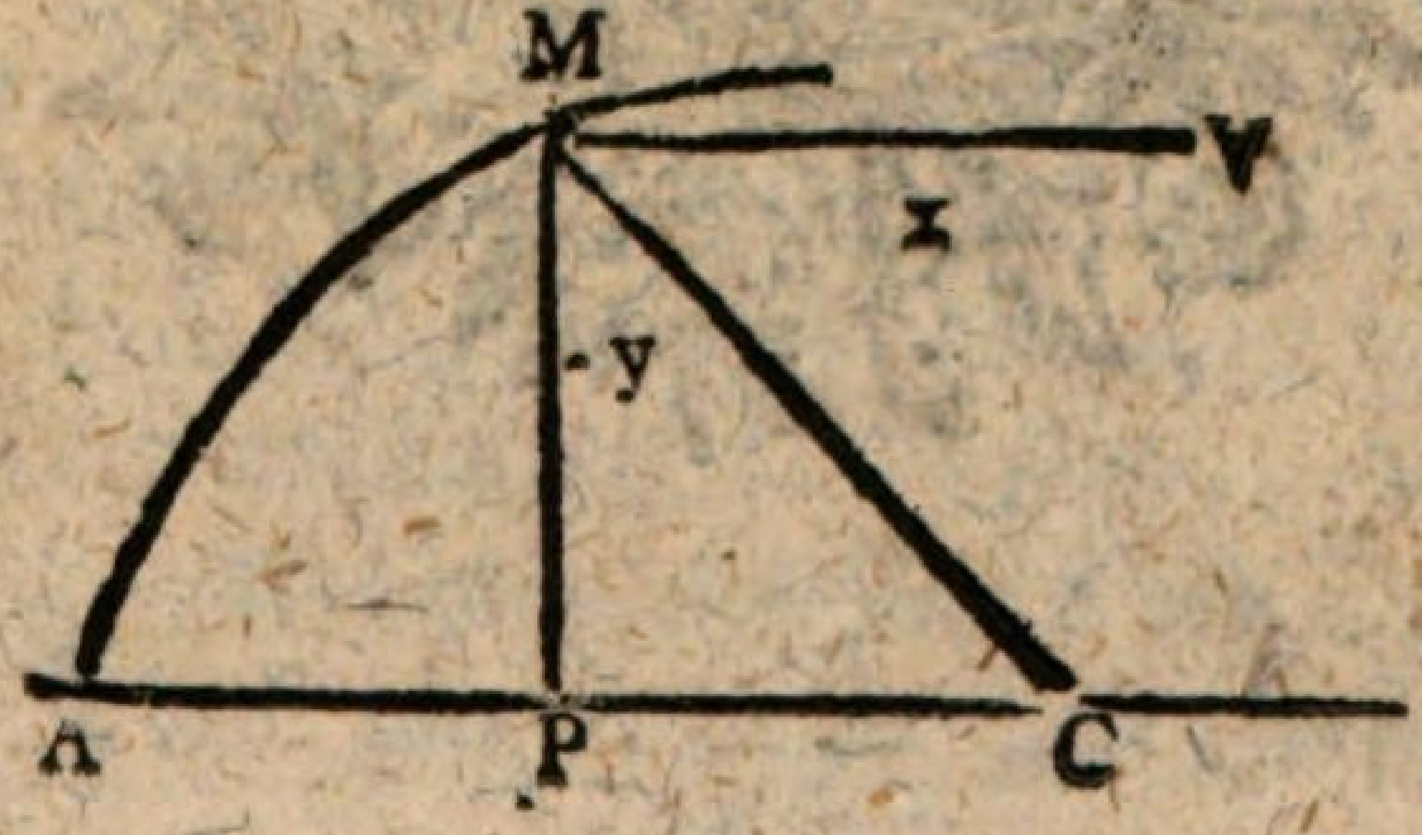
Diese Auflösung ist ganz algemein, und man mus allemahl so verfahren, wenn man entweder weis, daß der Körper sich nicht in einer und eben derselben Fläche bewegt, oder doch nicht davon aus den Umständen der Aufgabe vergewissert ist, daß der Weg des Körpers in einer Ebene liege. Weis man dieses leztere aus den Umständen der Aufgabe schon gewis vorher, so hat man nicht nöhtig den Ort des Körpers durch drey rechtwinklichte Coordinaten zu bestimmen, sondern es sind schon zwey dazu hinreichend. Und Herr Euler verfährt selbst so in der folgenden Aufgabe.

Aufgabe.

Ein Körper M wird beständig gegen einen festen Punkt C mit einer gegebenen Kraft getrieben. Man sol seine Bewegung bestimmen.

Auflösung.

Der Weg, durch welchen der Körper fortgehet, liegt mit dem Punkt C in einer Ebene. Diese Ebene kan durch die Ebene der Zeichnung vorgestellet werden. Man setze, daß der Körper in dem Punkt A seine Bewegung angefangen habe; man ziehe durch A und C eine grade Linie AC in dieser Ebene, und nehme selbige für die Axe an. Ist nun der Körper in der Zeit t von A nach M fortgegangen, so ziehe man von M auf AC die Perpendikullinie MP. Man ziehe ferner die grade Linie MC und setze CP = x,



PM

PM $= y$, und CM $= \sqrt{(xx + yy)} = r$. Die potentia acceleratrix, wodurch der Körper in M gegen C nach der Richtung MC getrieben wird, sey $= V$, und man resolvire diese Kraft V nach den Richtungen MP und MV; so wird die Kraft Mx deren Richtung mit AC parallel ist

$= \frac{x}{r} V$, und die Kraft My nach der Richtung MP

$= \frac{y}{r} V$. Nimt man nun das Element der Zeit dt für constant, so hat man vermöge des vorhergehenden Lehnsatzes

$$\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{x}{r} V \quad \text{und} \quad \frac{2ddy}{dt^2} = -\frac{y}{r} V,$$

oder:

$$\frac{rddx}{x} = -\frac{1}{2} Vdt^2 \quad \text{und} \quad \frac{rddy}{y} = -\frac{1}{2} Vdt^2$$

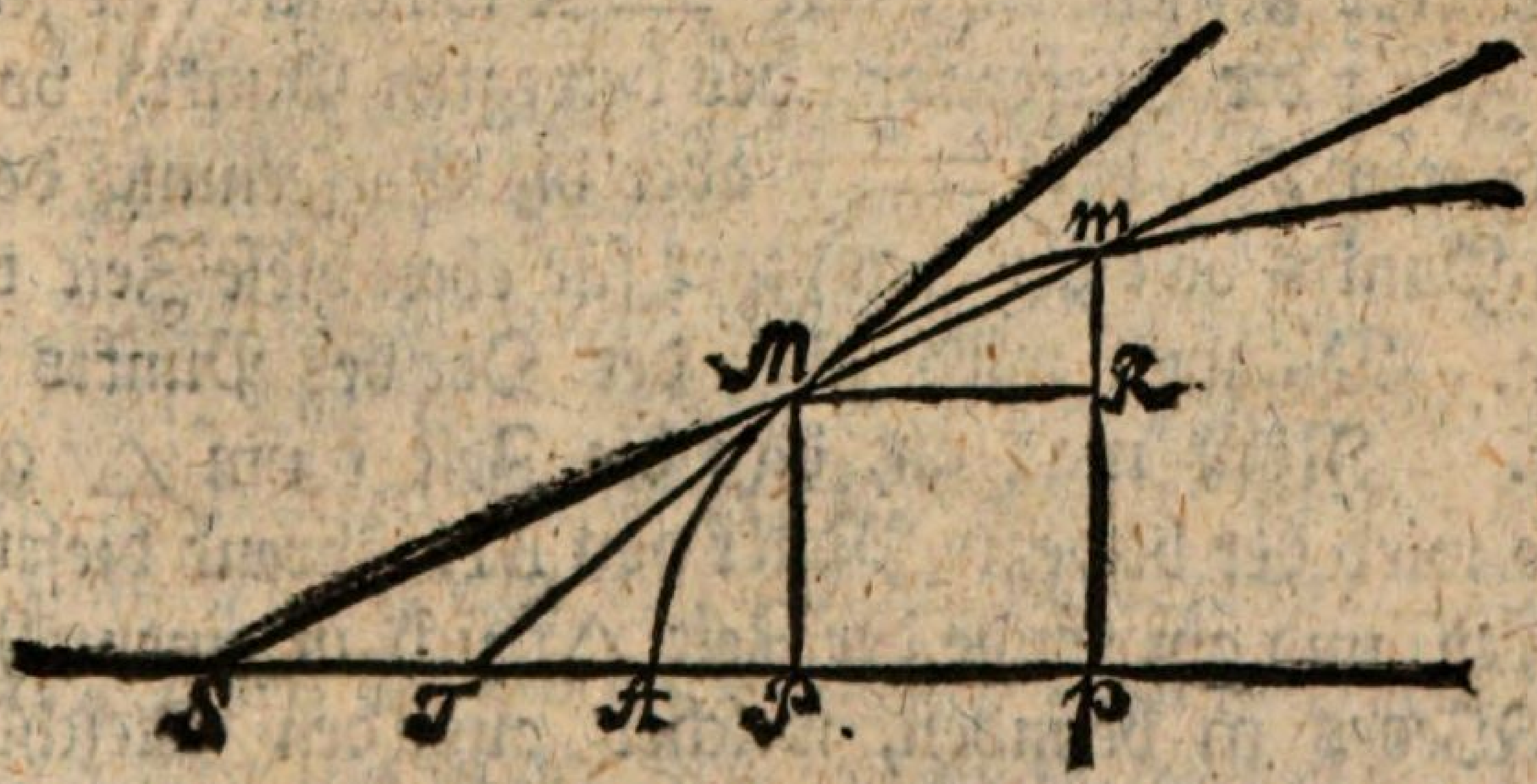
Ich seze diese Auflösung nicht weiter her, da ich jezt nur einen einzelnen Fal brauche, in welchem Herr Euler die Fundamentalgleichungen durch Hülfe seines neuen Grundsatzes findet, um daraus algemeine Maximen zu schliessen.

Al-

Algemeine Betrachtung

über die Art durch Hülfe des neuen Eulerischen Grundsatzes der Mechanik die Mechanischen Aufgaben aufzulösen.

Wenn man von der Bewegung eines Punkts deutlich und volständig urtheilen wil; so mus man zuerst den Weg kennen, durch welchen der Punkt fortgehet, und dieser wird entweder eine grade oder eine gekrümte Linie seyn. Man mus ferner wissen, wie weit der Punkt in einer gegebenen Zeit in seinem Wege fortgegangen ist, und zu dem Ende mus man in einem jeden Zeitpunkt den Ort angeben können, worin sich der bewegte Punkt in seiner Bahn befindet. Liegt der Weg, durch welchen der Punkt fortgehet, ganz in einer und eben derselben Ebene, so ist die Art, die Natur dieser Linie durch zwey rechtwinklichte Coordinaten auszudrükken, die bekanteste. Es sey AM = s



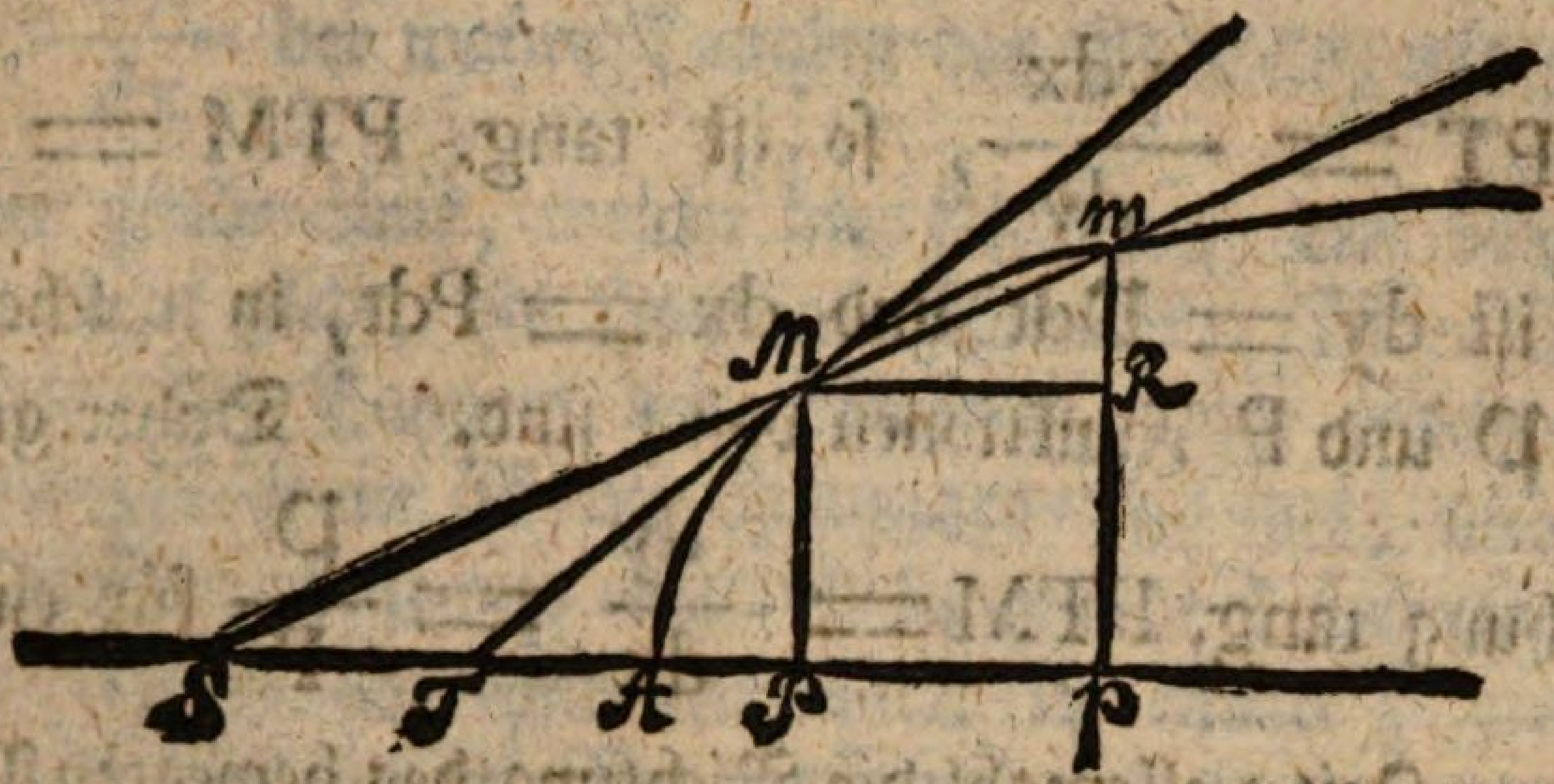
der Weg, welchen der Punkt in der Zeit t zurük gelegt hat. Man ziehe durch A die grade Linie Sp, und lasse auf dieselbe aus M die Perpendikullinie MP fallen, so daß AP = x und PM = y. Sol man nunmehro den Ort finden, wo sich der bewegte Punkt am Ende der Zeit t befindet, so wird diese

diese Aufgabe aufgelöset seyn, wenn man aus der gegebenen Grösse der Zeit t die Grösse sowohl von x als auch von y bestimmen kan. Es werden also x und y gewisse Funktionen von t seyn, und der Aufgabe wird ein Genüge geschehen, wenn diese Funktionen von t bekant sind. Sobald aber diese Funktionen bekant sind, ist zugleich die Gleichung bekant, welche die Natur der Linie AM, wodurch der Punkt fortgehet, ausdrükt, weil man zwey Gleichungen hat, und drey Grössen t, x, y, von welchen man t eliminiren und also eine Gleichung zwischen x und y finden kan, welches die Gleichung für die Linie AM seyn wird.

Es sey also $x = T$, und $y = \mathfrak{T}$, so daß T und $\mathfrak{T}$ gewisse Funktionen von t sind, so werden diese beyden Gleichungen den Ort M, worin sich der bewegte Punkt für eine jede gegebene Zeit befindet, volkommen bestimmen, unter der Bedingung, daß der Punkt beständig in der Ebene des Winkels APM bleibet. Zieht man durch das Anfangspunkt der Abscissen A eine grade Linie, welche die Axe der Abscissen, die ich in der Folge kurz die Hauptaxe nennen wil, rechtwinklicht schneidet, so kan diese füglich die Coordinirte Axe heissen; und $AP = x$ wird für eine jede gegebene Zeit t die Entfernung des bewegten Punkts von der Coordinirten Axe, $PM = y$ aber die Entfernung des bewegten Punkts von der Hauptaxe für eben diese Zeit t ausdrükken. Dadurch wird aber der Ort des Punkts völlig bestimt. Nimt man an, daß die Zeit t um Δt grösser wird, so wird der bewegte Punkt von M während dieser Zeit fortrükken, und am Ende der Zeit Δt sich in einem Punkt seines Weges m befinden, welcher aus den Gleichungen $x = T$ und $y = \mathfrak{T}$ ebenfals leicht gefunden wird. Wenn nemlich t um Δt grösser wird, so wird $x + \Delta x$ aus x, und $y + \Delta y$ aus y, folglich $T + \Delta T$ aus T und $\mathfrak{T} + \Delta\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{T}$, folglich $\Delta x = \Delta T = P\Delta T + Q\Delta t^2 + R\Delta t^3 + \text{etc.}$ und $\Delta y = \Delta\mathfrak{T} = \mathfrak{P}\Delta t + \mathfrak{Q}\Delta t^2 + \mathfrak{R}\Delta t^3 + \text{etc.}$ Die erste Gleichung giebt den Wehrt von

Pp

Pp = Δx um welche Weite sich der bewegte Punkt wäh-



rend Δt weiter von der Coordinirten Axe entfernet: und die zweyte giebt die Grösse von Rm = Δy um welche der Punkt während eben dieser Zeit Δt weiter von der Hauptaxe fortgehet. Ist der Weg des bewegten Punkts eine krumme Linie, so ändert sich die Richtung desselben in jedem Augenblik, und die Richtung desselben läst sich überhaupt nicht angeben; sondern man kan nur sagen, nach welcher Richtung er in einem jeden Augenblik der Zeit fortgehet. Und diese Richtung ist nichts anders, als die Lage der graden Linie, in welcher der Körper vermöge seiner Verbleibungskraft fortgehen würde, wenn in dem Augenblik, für welchen man die Richtung des Punkts wissen wil, alle Kräfte, die ihn vorher aus seiner graden Bahn gelenket haben, aufhören, auf ihn zu würken. Wenn aber der Punkt M in der krummen Linie Mm fortgehet, so würde er gewis in der graden Linie TM fortgehen, welche die krumme Linie bey dem Punkt seines Weges M berühret, wenn nicht eine Kraft da wäre, welche ihn in der Zeit beständig einwerts nach der Hauptaxe zu triebe. Wenn diese Kraft aufhörte auf ihn zu würken, so würde er vermöge seiner Verbleibungskraft, mit der Geschwindigkeit, die er in M hat in der Berührungslinie fortgehen. Es giebt also die Lage der Tangente in M gegen die Hauptaxe die Richtung des Punkts in M. Es

 ist

ist aber der Tangent des Winkels PTM $= \frac{y}{PT}$. Da nun PT $= \frac{ydx}{dy}$, so ist tang. PTM $= \frac{dy}{dx}$. Nun ist dy $=$ $\mathfrak{P}$dt und dx $=$ Pdt, in welchen Formuln $\mathfrak{P}$ und P Funktionen von t sind. Daher giebt die Gleichung tang. PTM $= \frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{P}}{P}$ für eine jede gegebene Zeit t allemahl die Richtung des bewegten Punkts. Man kan sich auch auf diese Art davon überführen, daß keine andre grade Linie als die Tangente TM die Richtung des bewegten Punkts in M geben könne. Wenn der bewegte Punkt M sich nach Verfliessung der Zeit t in M befindet, und von nun an in der Zeit Δt bis nach m fortgehet, und man nimt an, der Punkt sey während der Zeit Δt nach einerley Richtung fortgegangen so wird die grade Linie Mm, welche die krumme Linie Am in den beyden Punkten M und m schneidet, die Richtung des bewegten Punkts während der Zeit Δt seyn, und der Winkel mMR $=$ MSP giebt die Lage dieser Linie gegen die Haupt-Axe. Es ist aber tang. mMR $=$ tang. MSP $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Folglich wird die grade Linie, nach welcher der bewegte Punkt in der Zeit Δt grade fortgehet, die Hauptaxe unter einem Winkel schneiden, dessen Tangent $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nun geht aber der Punkt von M aus nur in der Zeit $\Delta t = 0 =$ dt nach einerley Richtung fort, und so lange der Δt noch ein anderer Wehrt beygelegt wird, ist die Voraussetzung falsch, daß der Punkt während der Zeit Δt nach einerley Richtung fortgehen solte. Wenn aber $\Delta t = 0 =$ dt, so ist

ist auch $\Delta y = 0 = dy$, und $\Delta x = 0 = dx$, folglich $\frac{dy}{dx}$ der wahre Tangent des Winkels, unter welchem die grade Linie, welche die Richtung des bewegten Punkts in M giebt, die Hauptaxe schneidet. Nun ist aber eben dieses der Tangent des Winkels, unter welchem die Berührungslinie in M die Hauptaxe schneidet, und man weis ohnedem, daß aus einer Sekante eine Tangente wird, wenn die beyden Durchschnittspunkte in einem zusammenfallen, welches in der Voraussetzung, daß $\Delta t = 0$ auch in der Zeichnung geschehen mus. Darf man also wohl in der Mechanik um die Richtung eines in einer gekrümten Linie fortgehenden Punkts zu finden, annehmen, daß er in einem so genannten unendlich kleinen Theil der Zeit durch eine unendlich kleine grade Linie fortgehe, die ein Theil seines krummen Weges seyn sol? Darf man wohl setzen, daß dieser unendlichkleine Theil der krummen Linie zugleich ein Theil der graden Linie sey, welche die krumme Linie berühret? Sol dieser so genannte unendlichkleine Theil der krummen und der graden Linie, den man gewöhnlich für einen gemeinschaftlichen Theil der krummen und der graden dieselbe berührenden Linie annimt, noch würklich ausgedehnet seyn, so widerspricht dies offenbahr dem Begrif der krummen Linie, denn dieser verlangt, daß kein Theil derselben grade sey. Wir demonstriren ja mit dem Euklides, daß die Tangente nur ein einziges Punkt mit dem Umkreis des Cirkels gemein habe. Wir demonstriren mit dem Apollonius, daß die grade Linie, so eine Parabel, oder Ellipse, oder Hyperbel berühret, auch diese krummen Linien nur in einem einzigen Punkt berühre. Wir beweisen eben diese Eigenschaft auch von andern krummen Linien. Man ist also gezwungen zu gestehen, daß der unendlichkleine Theil der krummen und der graden Berührungslinie, welcher von beyden ein gemeinschaftlicher Theil seyn sol, gar keine ausgedehnte Linie, sondern nur ein einziger Punkt sey. Wa-

rum sol er denn eine Linie und noch dazu eine grade Linie heissen? Warum wil man der Schönheit der theoretischen Mathesis auch nur durch ungewöhnliche Arten zu reden etwas entziehen, und in dem einen Theil derselben eine andre Sprache führen, als in dem andern zum grossen Nachtheil der Deutlichkeit?

Aus den beyden Gleichungen $x = T$ und $y = \mathfrak{T}$ läst sich nicht nur die Richtung des bewegten Punkts für eine jede gegebene Zeit t, sondern auch die wahre Geschwindigkeit bestimmen, welche der bewegte Punkt nach Verfliessung der Zeit t hat. Wenn der Punkt den Weg $AM = s$ in der Zeit t zurükgelegt hat, so ist nach der grösten Schärfe die Geschwindigkeit desselben in M die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, welche mit den gewöhnlichen Zeichen durch $\frac{ds}{dt}$ ausgedrükt wird, die Geschwindigkeit mag so veränderlich seyn, als sie wil, welche auf die Art gefunden wird. Es sey Mm der Bogen, welchen der bewegte Punkt in der Zeit Δt weiter fortgehet, so ist $Mm = \Delta s$, und da auch s eine Funktion von x, so ist $\Delta s = \pi \Delta x + \varrho \Delta x^2 + \sigma \Delta x^3 +$ etc. Man ziehe die Sehne dieses Bogens Mm, so ist diese Sehne $= \surd(\Delta x^2 + \Delta y^2)$. Es sey das Verhältnis von $\Delta x : \Delta y = 1 : N$, so daß N hier eine jede rationale oder irrationale und dabey veränderliche Zahl bedeutet, so wird $\Delta y = N \Delta x$, und $\Delta y^2 = N^2 \Delta x^2$, und die Sehne $Mm = \surd(\Delta x^2 + N^2 \Delta x^2) = \Delta x \surd(1 + N^2)$. Der Bogen Mm ist grösser als seine Sehne. Es sey die Differenz dieser beyden Grössen $= D$, so ist der Bogen $Mm = \Delta s = \Delta x \surd(1 + N^2) + D$, und also $D = \varrho \Delta x^2 + \sigma \Delta x^3 +$ etc. und $\frac{\Delta s}{\Delta t} =$

$$\frac{\Delta x\sqrt{(1+N^2)}+\varrho\Delta x^2+\sigma\Delta x^3+\text{etc.}}{\Delta t}$$, folglich die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=\frac{dx\sqrt{(1+N^2)}}{dt}$. Aber in der Voraussezung, daß $\Delta t=0$ wird aus $\frac{\Delta y}{\Delta x}=N$, nunmehro $\frac{dy}{dx}=\frac{\mathfrak{P}}{P}$, folglich ist $\frac{ds}{dt}$

$$=\frac{dx\sqrt{\left(1+\frac{\mathfrak{P}^2}{P^2}\right)}}{dt}=\frac{\sqrt{\left(dx^2+\frac{\mathfrak{P}^2}{P^2}dx^2\right)}}{dt}=$$

$$\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dt}=\frac{\sqrt{(P^2dt^2+\mathfrak{P}^2dt^2)}}{dt}=\frac{dt\sqrt{(P^2+\mathfrak{P}^2)}}{dt}$$

$=\sqrt{(P^2+\mathfrak{P}^2)}$. Da auf diese Art so wohl die Richtung als auch die Geschwindigkeit eines bewegten Punkts für eine jede gegebene Zeit t so leicht gefunden wird, so wird nunmehro bald bewiesen werden können, daß keine andre Grundsäze der Mechanik, als der oben bewiesene, nöhtig sind, wenn man die Veränderungen in der Bewegung eines Punkts, der durch gegebene Kräfte getrieben wird, deren Richtungen alle in einer Ebene liegen, bestimmen sol.

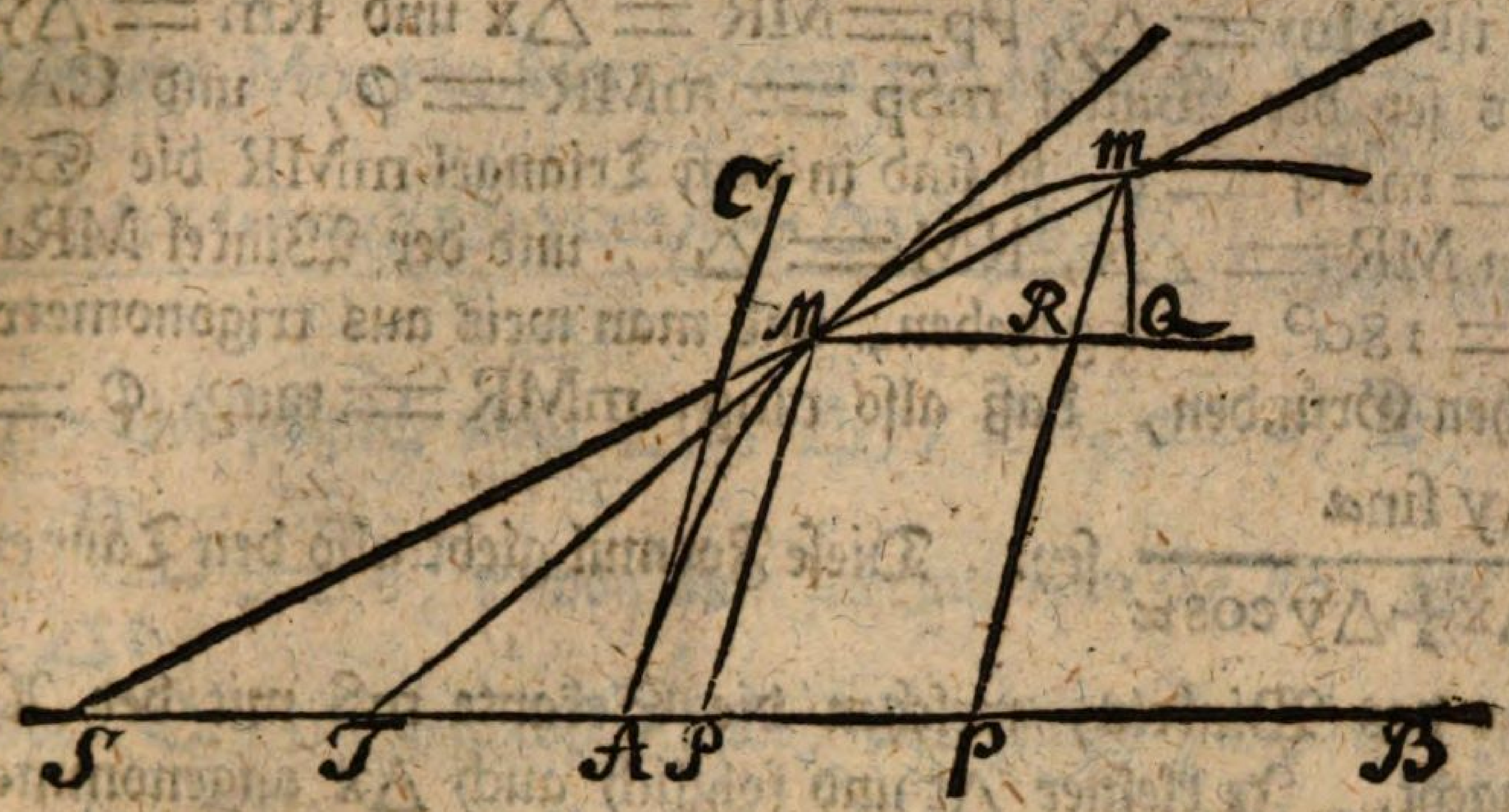
Man kan durch Hülfe der obigen Formuln für eine jede gegebene Zeit t die Entfernung des bewegten Punkts M so wohl von der Haupt- als Coordinirten Axe angeben, und also läßt sich daraus abnehmen, wie weit der Punkt für jede gegebene Zeit von den beyden Axen fortgehe. Und da y die Entfernung desselben von der Hauptaxe, und x seine Entfernung von der Coordinirten Axe für jede gegebene Zeit giebt, so ist $\frac{dy}{dt}=\mathfrak{P}$ die Geschwindigkeit, mit welcher

dieser Punkt von der Hauptaxe und $\frac{dx}{dt} = P$ seine Geschwindigkeit, mit welcher derselbe von der coordinirten Axe nach Verfliessung der Zeit t fortgehet. Es kan seyn, daß eine von diesen Formuln 𝔓 oder P negativ ist, und sodann ist es ein Beweis, daß sich der bewegte Punkt der Haupt- oder Coordinirten Axe nähert, nachdem entweder 𝔓 oder P negativ ist. Die Richtung, nach welcher der Punkt entweder von der Hauptaxe fortgehet, oder sich derselben nähert, ist eine grade Linie, welche mit der coordinirten Axe parallel liegt. Und die Richtung, nach welcher sich der Punkt von der coordinirten Axe weg, oder gegen dieselbe bewegt, ist der Hauptaxe parallel. Und auf diesen Betrachtungen gründet sich die Art, den Eulerischen Grundsaz, welcher eigentlich nur für den Fal bewiesen ist, da die Richtung der Kraft mit der Richtung des bewegten Punkts übereinkomt, auch da anzuwenden, wo eine, oder mehrere Kräfte auf ein bewegtes Punkt, nach solchen Richtungen würken, die von der Richtung des bewegten Punkts verschieden sind.

Sol dieser Grundsaz überhaupt bey der Bewegung der Punkte gebraucht werden, deren Weg in einer Ebene liegt, so mus man sich vorstellen, daß der Punkt zweyen Bewegungen unterworfen sey, so daß die Richtung der einen der Hauptaxe, und die Richtung der andern der coordinirten Axe parallel ist. Ich habe bisher angenommen, daß diese beyden Axen einander rechtwinklicht schneiden. Allein dieses ist nicht nothwendig. Man kan eben diesen Grundsaz gebrauchen, wenn gleich der Winkel, unter welchem sich die Axen schneiden, ein schiefer Winkel ist. Es gehe der Punkt M in der Linie AM fort; man nehme AB für die Hauptaxe, und ziehe von M auf AB eine grade

Linie

Linie MP unter einem beliebigen Winkel MPB;



so wird man auch jezt den wahren Ort des Punkts M für jede gegebene Zeit angeben können, wenn man weis, wie gros AP $= x$ und PM $= y$ für eine jede gegebene Zeit t sey. Es wird also auch in diesem Fall sowohl x als y eine Funktion von der Zeit t seyn, so daß $x = T$, $y = \mathfrak{T}$, und T so wohl als $\mathfrak{T}$ gewisse Funktionen von t sind. Zieht man durch A die grade Linie AC mit PM parallel, so ist nunmehro AC die coordinirte Axe, und wenn man die Gleichung $x = T$ und $y = \mathfrak{T}$ differentiiret, so daß $dx = Pdt$, und $dy = Qdt$; so giebt $\frac{dx}{dt} = P$ die Geschwindigkeit der Bewegung des Punkts M nach Endigung der Zeit t, deren Richtung mit Hauptaxe parallel ist, und $\frac{dy}{dt} = Q$ giebt die Geschwindigkeit der Bewegung des Punkts M nach Endigung der Zeit t, deren Richtung mit der coordinirten Axe parallel ist. Die Lage der Tangente in M in Ansehung der Hauptaxe giebt die wahre Richtung des bewegten Punkts in M. Diese zu finden, schliesse ich so: Es sey der Punkt M in der Zeit Δt von M weiter fortgegangen bis in m. Man ziehe durch m die Linie mp

mit MP parallel, und durch M auch MR mit AB parallel, so ist $Mm = \Delta s$, $Pp = MR = \Delta x$ und $Rm = \Delta y$. Es sey der Winkel $mSp = mMR = \varphi$, und $CAB = mRq = \alpha$, so sind in dem Triangel mMR die Seiten $MR = \Delta x$, $RM = \Delta y$, und der Winkel $MRm = 180^\circ - \alpha$ gegeben, und man weis aus trigonometrischen Gründen, daß also $\text{tang. } mMR = \text{tang. } \varphi = \frac{\Delta y \sin\alpha}{\Delta x + \Delta y \cos\alpha}$ sey. Diese Formul giebt also den Tangenten des Winkels, welchen die Sekante mS mit der Axe macht. Je kleiner Δt und folglich auch Δx angenommen wird, desto mehr nähert sich die Grösse des Winkels mSp der Grösse des Winkels MTP, unter welchem die Tangente TM die Hauptaxe schneidet, und sobald $\Delta t = 0$, folglich auch $\Delta x = 0 = dx$ und $\Delta y = 0 = dy$ ist, so fält die Sekante mit der Tangente zusammen, und es ist nunmehro $\text{tang } \varphi = \text{tang } MTP = \frac{dy \sin\alpha}{dx + dy \cos\alpha}$ $= \frac{Q \sin\alpha}{P + Q \cos\alpha}$, weil $dy = Qdt$, und $dx = Pdt$.

Die Richtung des bewegten Punkts in M wird also aus den beyden Geschwindigkeiten P und Q, und aus dem gegebenen Winkel α gefunden. Die eigentliche wahre Geschwindigkeit, welche der Punkt in M hat, ist $= \frac{ds}{dt}$. Man verlängere MR gegen q, und lasse aus m auf Mq eine Perpendikullinie mq fallen, so ist die Sehne $Mm = \sqrt{(Mq^2 + mq^2)}$. Nun ist $Mq = MR + Rq$, $MR = \Delta x$ und $Rq = \Delta y \cos\alpha$, folglich $Mq^2 = \Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y \cos\alpha + \Delta y^2 \cos\alpha^2$. Ferner ist $mq = \Delta y \sin\alpha$, und also die Sehne $Mm = \sqrt{(\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y \cos\alpha + \Delta y^2 \cos\alpha^2 + \Delta y^2 \sin\alpha^2)}$. $= \sqrt{(\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y \cos\alpha + \Delta y^2)}$ wenn

wenn der sinus totus $= 1$. Ist nun die Differenz des Bogens Mm von seiner Sehne $= D$, so ist $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(\Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y \cos\alpha + \Delta y^2)} \mp D}{\Delta t}$. Aber wenn Δt und folglich auch Δx, Δy, Δs, $= 0$, so wird $\frac{D}{\Delta t} = 0$, wovon man sich auf eben die Art, wie ich oben S. 156. geschlossen habe, überzeugen kan, und folglich ist $\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(dx^2 + 2dxdy\cos\alpha + dy^2)}}{dt} = \frac{\sqrt{(P^2dt^2 + 2PdtQdt\cos\alpha + Q^2dt^2)}}{dt} = \sqrt{(P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2)}$. Also wird auch die wahre Geschwindigkeit des Punkts in M aus den beyden Geschwindigkeiten P und Q und dem gegebenen Winkel α gefunden.

Wenn ein Punkt in einer graden Linie blos vermöge seiner Verbleibungskraft fortgehet, so ist $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ allemahl eine beständige Grösse, folglich $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t} = 0$, und also auch $\frac{\Delta\Delta s}{\Delta t^2} = 0$ und $\frac{dds}{dt^2} = 0$. Eben dieses giebt die algemeine Formul $\frac{dds}{dt^2} = \frac{nP}{M}$. Denn geht der Punkt blos vermöge seiner Verbleibungskraft in einer graden Linie fort, so ist keine vis sollicitans da, die ihn

 treibt,

treibt, und also $P = 0$ und $\frac{nP}{M} = 0$. Wenn nun ein Punkt in einer krummen Linie AM fortgehet, und in dem

Punkt M allemahl von einer Kraft P nach der Richtung MF getrieben wird; so ziehe man durch A eine grade Linie AB mit MF parallel, und aus M die Applicate MP unter einem beliebigen Winkel auf AB als die Hauptaxe. Man ziehe durch A die coordinirte Axe AC mit PM parallel, so daß $AP = x$, $PM = y$, Funktionen von der Zeit t sind, in welcher der Weg $AM = s$ von dem Punkt dessen Masse $= M$ zurükgelegt ist. Wenn sich der Punkt M allein nach der Richtung AB bewegte, so würde dies der Fal seyn, in welchem die Richtung der Kraft P mit der Richtung des bewegten Punkts übereinkomt, und also wäre

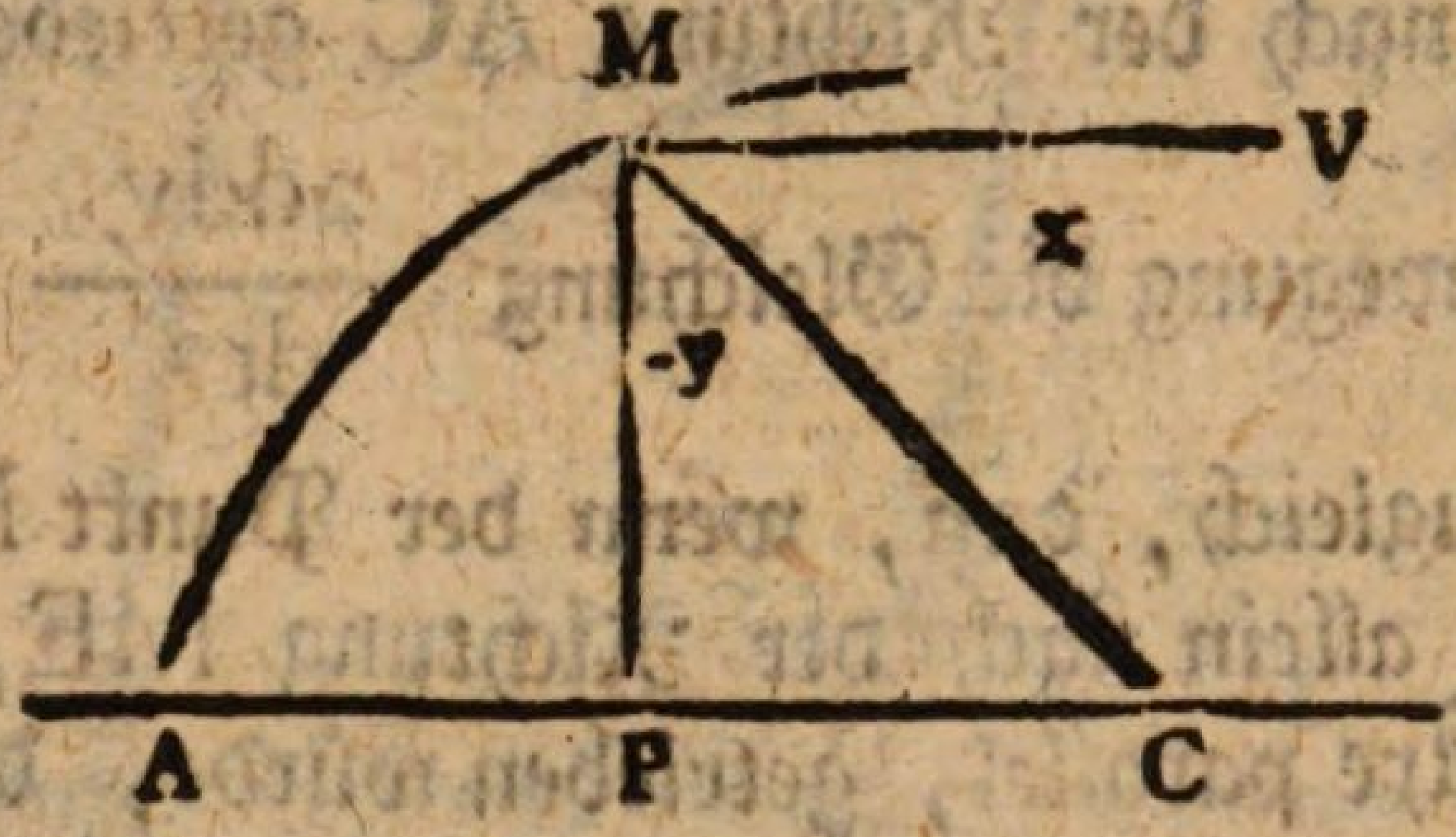
$\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{P}{M}$. Nun geht aber der Punkt M auch zugleich nach der Richtung AC fort, und auf diese Bewegung hat die Kraft P gar keine Würkung. Es ist keine Kraft weiter da, welche den Punkt M nach dieser Richtung treiben solte, als die blosse Verbleibungskraft. Da die Kraft eine absolute Kraft ist, so würde sie eben eine solche Verän-

derung

derung nach der Richtung AB hervorbringen, als sie jezt verursacht, wenn der Punkt M gleich keiner andern Bewegung unterworfen wäre. Darum drükt auch noch jezt die Gleichung $\frac{2ddx'}{dt^2} = \frac{P}{M}$ die Veränderung in der Bewegung aus, welche die Kraft P nach der Richtung AB verursachet, und weil der Punkt M blos durch seine Verbleibungskraft nach der Richtung AC getrieben wird, so giebt diese Bewegung die Gleichung $\frac{2ddy}{dt^2} = 0$. Hieraus erhellet zugleich, daß, wenn der Punkt M in M von einer Kraft Q allein nach der Richtung ME, so mit der Coordinirten Axe parallel, getrieben würde, die Gleichung $\frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Q}{M}$ die Veränderung ausdrükken würde, welche die Kraft Q nach der Richtung von AC in der Bewegung verursachte, und sodann würde der Punkt M blos vermöge seiner Verbleibungskraft nach der Richtung AB fortgehen, und dies würde die Gleichung $\frac{2ddx}{dt^2} = 0$ geben. Würken also zwey Kräfte P und Q zugleich auf das Punkt M, die eine P nach der Richtung MF, und Q nach der Richtung ME, so werden diese beyden Gleichungen $\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{P}{M}$, und $\frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Q}{M}$, die gesamte Veränderung in der Bewegung des Punkts M ausdrükken, so die beyden Kräfte P und Q verursachen. Triebe die Kraft P den Punkt M gegen die coordinirte Axe, so wäre $\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{P}{M}$, und wenn Q den

Punkt M gegen die Hauptaxe treibt, so ist $\frac{2ddy}{dt^2} = -\frac{Q}{M}$.

Es gehe nun der Punkt M durch die Linie AM fort, und werde während seiner Bewegung beständig von einer



gegebenen Kraft nach einem festen Punkt C getrieben, so geht die Richtung dieser Kraft in M nach MC. Zieht man nun durch C die grade Linie AC für die Hauptaxe, und läst auf dieselbe aus M die rechtwinklichte Ordinate MP fallen, so ist die Richtung MC mit keiner von den Axen parallel. Allein man kan nach den Grundsätzen der Statik allemahl zwey Kräfte finden, deren eine nach der Richtung MP und die andre nach der Richtung MV, so mit AC parallel ist, würket. Man suche diese beyden Kräfte, und es sey die Kraft nach MV $= P$, und die Kraft nach MP $= Q$, so hat man die beyden Gleichungen $\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{P}{M}$ und $\frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Q}{M}$. Auf eine ähnliche Art kan man zu Werk gehen, wenn der bewegte Punkt in M zugleich von zweyen oder mehrern gegebenen Kräften nach verschiedenen Richtungen getrieben wird. Man findet leicht nach den Grundregeln der Statik eine einzige Kraft, welche diesen allen aequivalent ist, mit welcher man sodann eben wie vorhin zu verfahren hat. Man kan auch eine jede von den gegebenen Kräften nach den

Rich-

Richtungen der beyden Axen resolviren, und alsdann alle die Kräfte, welche einerley Richtung haben, zusammen addiren, so erhält man eben dasselbe. Sezt man in dem vorigen Fal CM = r, und die Kraft, welche den Punkt M gegen C treibt = V, so ist $P = \frac{Vx}{r}$, und $Q = \frac{Vy}{r}$, folglich $\frac{2ddx}{dt^2} = - \frac{Vx}{Mr}$, und $\frac{2ddy}{dt^2} = - \frac{Vy}{Mr}$, oder $\frac{2ddx}{dt^2} = - \frac{x}{r}V$, und $\frac{2ddy}{dt^2} = - \frac{y}{r}V$, wenn man die potentiam acceleratricem mit V bezeichnet. Dies sind eben die Gleichungen, welche Herr Euler im III. Theil der Berlinschen Histoire de l'Academie, in der Abhandlung von der Bewegung der grossen Himmelskörper, entwikkelt hat.

Eben diese Funtamentalgleichungen enthalten die Gründe folgende umgekehrte Aufgabe aufzulösen. Man weis für eine jede gegebene Zeit t die Grösse der Coordinaten x und y, man kennet also die Linie, durch welche der bewegte Punkt fortgehet; es ist zugleich die Masse des bewegten Punkts M gegeben: Man sol die Kräfte finden, wodurch der Punkt in dieser Bewegung erhalten wird. Aus den Gleichungen $\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{P}{M}$, und $\frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Q}{M}$ folgt, daß der Punkt nach der Richtung der Hauptaxe mit einer Kraft $P = \frac{2Mddx}{dt^2}$, und nach der Richtung der Coordinirten Axe mit einer Kraft $Q = \frac{2Mddy}{dt^2}$ getrieben

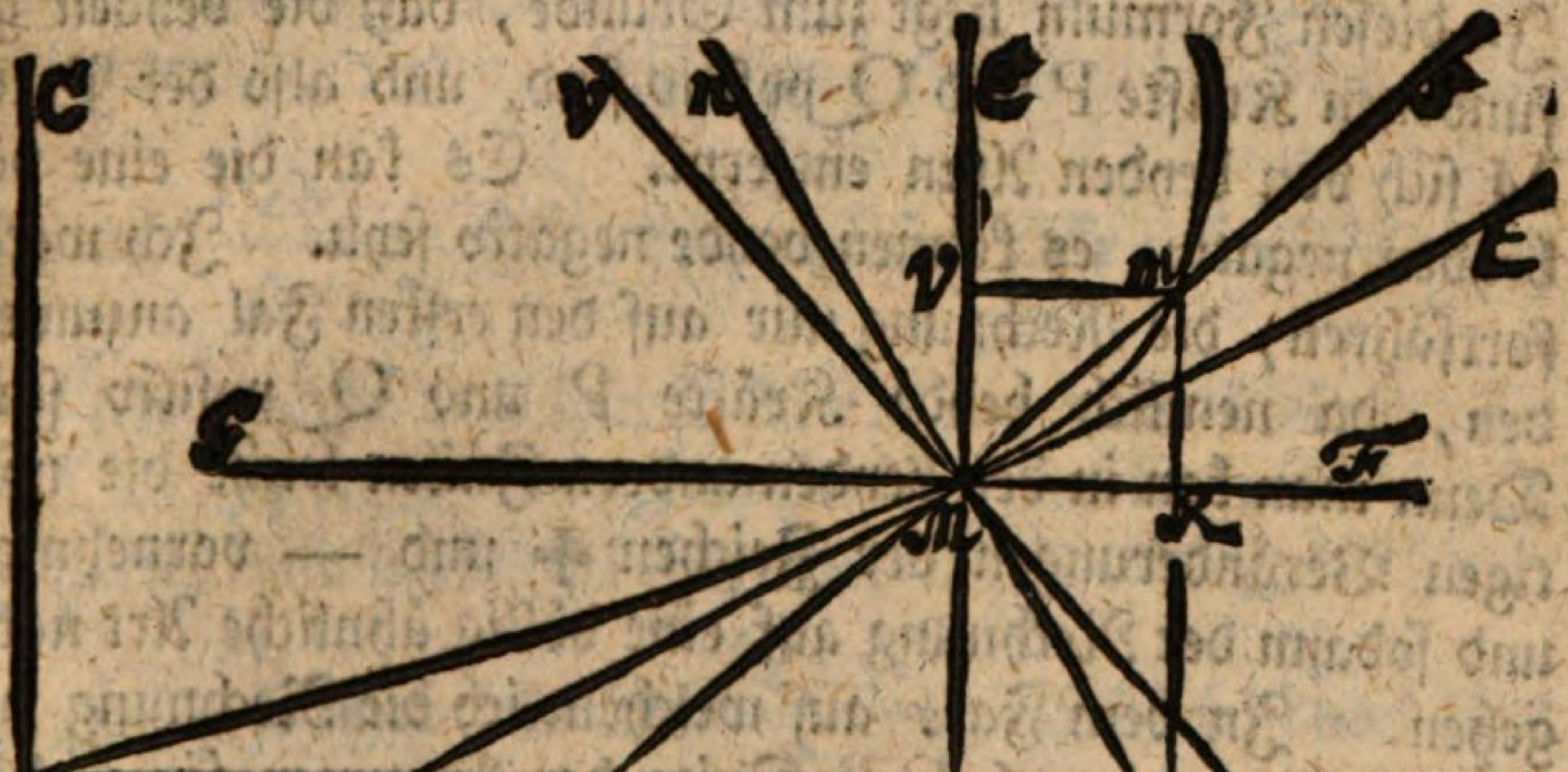
werde.

werde. Nach den Grundregeln der Statik kan aber leicht eine Kraft angegeben werden, welche diesen beyden Kräften anquivalent ist, und daher auf das Punkt M eben die Würkung hat.

Es ist der Mühe wehrt, daß ich noch in der Kürze die sonst gewöhnlichen Grundsäze der Mechanik, worauf die Auflösung der Mechanischen Aufgaben, wenn die Richtungen der gegebenen Kräfte alle in einer Ebene liegen, sonst gebauet wird, aus dem Eulerischen Grundsaz herleite. Sonst sucht man eine Gleichung, woraus die wahre Geschwindigkeit des bewegten Körpers in einem jeden Punkt seines Weges sich herleiten lässet. Man sucht ferner eine Gleichung, welche den radium curvaturæ des krummen Weges, worin der Körper fortgehet, für einen jeden Punkt seines Weges bestimt. Man bringt zu dem Ende die gegebenen Kräfte nach den Gesetzen der Statik auf zwey andre, deren eine nach der Richtung des Tangenten, die andre aber nach der Richtung der Normallinie würket, und nennt jene kurz die Tangentialkraft, und diese die Normalkraft, und beweiset durch ziemlich weitläuftige Schlüsse und mühsahme Rechnungen, daß die Tangentialkraft allein die Geschwindigkeit des bewegten Körpers, seine Richtung aber gar nicht, ändere; daß aber die Normalkraft allein die Richtung des bewegten Körpers, und seine Geschwindigkeit gar nicht ändre. Diese beyden Gleichungen sind $Mcdc = \pm nTds$ und $r = \frac{Mc^2}{nP}$, worin M die Masse des Körpers, c die Geschwindigkeit, T die Tangentialkraft, P die Normalkraft, s den in der Zeit t zurükgelegten Theil des Weges, r den radium curvaturæ und n die oben bestimte beständige Zahl bedeutet, welche $= \frac{1}{2}$, wenn die Geschwindigkeit durch die Quadratwurzel der altitudinis debitæ, und t in 250 Theilchen einer Zeitsekunde ausgedrükt wird, s aber in Skrupeln eines Rheinländischen Fusses.

ses. Aus der ersten Gleichung schliest man die Geschwindigkeit des Körpers in einem jeden Punkt seines Weges, und aus der andern den radium curvaturæ für diesen Punkt. Beyde Gleichungen lassen sich ganz leicht und ungezwungen aus dem Eulerischen Grundsaz durch folgende Schlüsse herleiten.

Man setze, es bewege sich ein Punkt, dessen Masse = M in der krummen Linie AM, und es würken auf denselben in M gewisse gegebene Kräfte, deren Richtungen alle mit der krummen Linie AM in einer Ebene liegen. Man nehme eine grade Linie AB nach Belieben für die Hauptaxe, und ziehe aus M auf selbige die rechtwinklichte Applicate MP = y, so daß AP = x. Man suche an die Stelle der gegebenen Kräfte zwey andre P und Q, davon die erste P nach der Richtung MF mit der Hauptaxe AB, und die andre Q nach der Richtung ME mit der coordinirten



Axe AC parallel würket, so ist unter der Bedingung, daß dt constant ist, $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{nP}{M}$, und $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{nQ}{M}$ wenn s = AM, und t die Zeit, in welcher M den Weg

AM

AM zurük gelegt hat. Folglich $ddx = \frac{nPdt^2}{M}$ und $ddy = \frac{nQdt^2}{M}$. Ferner ist $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, und $ds^2 = dx^2 + dy^2$, folglich $dsdds = dxddx + dyddy$. Sezt man an die Stelle der Wehrte von ddx und ddy diejenigen Wehrte, welche die vorigen Gleichungen geben, so wird $dsdds = \frac{nPdt^2}{M} dx + \frac{nQdt^2}{M} dy = \frac{ndt^2}{M} (Pdx + Qdy)$, und also $\frac{dds}{dt} = \frac{ndt(Pdx + Qdy)}{Mds}$.

Wenn nun die Geschwindigkeit in $M = c$ gesezt wird, so ist $c = \frac{ds}{dt}$, und $dc = \frac{dds}{dt} = \frac{ndt(Pdx + Qdy)}{Mds}$.

In diesen Formuln liegt zum Grunde, daß die beyden gefundenen Kräfte P und Q positiv sind, und also der Punkt M sich von beyden Axen entfernt. Es kan die eine von beyden negativ, es können beyde negativ seyn. Ich werde fortfahren, die Rechnung nur auf den ersten Fal anzuwenden, da nemlich beyde Kräfte P und Q positiv sind. Denn man kan in den beyden andern Fällen leicht die nöhtigen Veränderungen der Zeichen + und — vornehmen, und sodann der Rechnung auf eine völlig ähnliche Art nachgehen. In dem Fal, auf welchem ich die Rechnung anwende, liegt die erhabene Seite der krummen Linie AM gegen die Hauptaxe, und die hohle Seite ist von der Hauptaxe abgekehret. Ich ziehe nun durch M die Tangente TMt, und zugleich die Normallinie MN, und suche an der Stelle der Kräfte P und Q zwey andre, deren eine nach der Richtung der Tangente, die andre nach der Richtung der Normallinie würket. Diese aber zu finden, schliesse ich so: Es sey zuerst durch M die Sekante SMs gezogen,

und durch M auf dieselbe die Perpendikulärlinie $\mu\nu$ und suche stat P und Q zwey andre Kräfte, deren eine nach der Richtung der Sekante, die andre nach der Richtung der durch die Sekante gezogenen Normallinie würket. Ich wil jene kurz mit Ms diese mit $M\mu$ bezeichnen und einen rechten Winkel mit R andeuten. So ist zuerst $\sin \mu Ms : \sin \mu MG = P : Ms$, $\mu Ms = R$, folglich $\sin tot : \sin \mu MG = P : Ms$. Es ist aber $\sin \mu MG = \sin \mu MF$ und weil $PM\mu + \mu MF = R = RMm + MmR$, ferner $PMF - \mu MF = PM\mu = \mu Ms - \mu MF = RMm$, so ist $\mu MF = MmR$, und also $\sin tot : \sin MmR = P : Ms$, und da $\sin. tot : MmR = \triangle s : \triangle x$, so wird $\triangle s : \triangle x = P : Ms$, und $Ms = \frac{P \triangle x}{\triangle s}$.

Fürs zweyte ist $\sin \mu Ms : \sin sMG = P : M\mu$; $\sin sMG = \sin sMF$, und $\mu Ms = MRm$, folglich $\sin MRm : \sin sMF = P : M\mu$; und da $\sin MRm : \sin sMF = \triangle s : \triangle y$, so ist $\triangle s : \triangle y = P : M\mu$, und $M\mu = \frac{P \triangle y}{\triangle s}$. Fürs dritte ist $\sin sM\nu : \sin PMs = Q : M\nu$, $sM\nu = R = MVm$, und $\sin PMs = \sin sME = \sin mMV$. folglich $\sin MVm : \sin mMV = Q : M\nu$, und da $\sin MVm : \sin mMV = \triangle s : (Vm = \triangle x)$, so wird $M\nu = \frac{Q \triangle x}{\triangle s}$. Endlich ist noch fürs vierte $\sin sM\nu : \sin PM\nu = Q : Ms$, $sM\nu = R = MVm$, $\sin PM\nu = \sin \nu ME$, und $\nu ME = \mu MP = FMs$ oder mMR, folglich $\sin MVm : \sin mMR = Q : Ms$, und da $\sin MVm : \sin mMR = \triangle s : \triangle y$, so ist $Ms = \frac{Q \triangle y}{\triangle s}$. Anstat der Kraft Q müssen also

die Kräfte $M\nu = \frac{Q\Delta x}{\Delta s}$, und $Ms = \frac{Q\Delta y}{\Delta s}$ und anstat P die Kräfte $M\mu = \frac{P\Delta y}{\Delta s}$, und $Ms = \frac{P\Delta x}{\Delta s}$ genommen werden. Die Summe der beyden Kräfte, welche nach Ms würken, und daher die ganze Kraft Ms, ist $= \frac{P\Delta x + Q\Delta y}{\Delta s}$, und die Summe der beyden Kräfte, welche in der Richtung der auf die Sekante SMs gezogenen Perpendikullinie würken, ist $= \frac{Q\Delta x - P\Delta y}{\Delta s}$. Denn da die Richtung $M\mu$ der Richtung $M\nu$ grade entgegen stehet, so mus $M\mu = -\frac{P\Delta y}{\Delta x}$ negativ seyn, weil $M\nu = \frac{Q\Delta x}{\Delta s}$ positiv ist. Je kleiner Δx angenommen wird, desto mehr nähert sich die Sekante SMs der Tangente TMt, und zugleich die Linie $\mu M\nu$ der eigendlich sogenanten Normallinie. Wenn aber Δx und folglich auch Δy und $\Delta s = 0$, so fält die Sekante SMs mit der Tangente TMt und μMs mit der eigentlichen Normallinie zusammen. Folglich ist die Tangentialkraft $= \frac{Pdx + Qdy}{ds}$, und die Normalkraft $= \frac{Qdx - Pdy}{ds}$. Wenn also die Tangentialkraft $=$ T, so ist $T = \frac{Pdx + Qdy}{ds}$. Es war aber $dc = \frac{ndt}{M} \times \frac{Pdx + Qdy}{ds}$ folglich ist $dc = \frac{nTdt}{M}$, und da $dt = \frac{ds}{c}$, so wird $dc = \frac{nTds}{Mc}$ oder $Mcdc = nTds$, welches die

erste

erste von den Gleichungen ist, deren Richtigkeit ich beweisen wolte.

Die algemeine Formul für den radium curvaturæ der krummen Linien, welche durch die gewöhnlichen Rechnungen gefunden wird, ist, wenn r den radium curvaturæ anzeigt, diese $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$. Allein man nimt bey diesen Rechnungen dx für constant an, welches jezt nicht geschehen darf, da dt schon constant angenommen wird, und x eine Funktion von t ist. Man findet aber durch eben die sonst gewöhnlichen Rechnungen, wenn dx als eine veränderliche Grösse angesehen wird, diese Formul $r = \frac{ds^3}{-dxddy + dyddx}$, wenn nemlich die hohle Seite der krummen Linie der Hauptaxe zugekehrt ist. Es ist aber die hohle Seite der krummen Linie AM von der Axe abgekehrt, und daher ist r negativ, folglich $r = \frac{ds^3}{dxddy - dyddx}$. Man setze auch hier stat ddx und ddy die oben gefundenen Wehrte, $ddx = \frac{nPdt^2}{M}$ und $ddy = \frac{nQdt^2}{M}$, so wird r

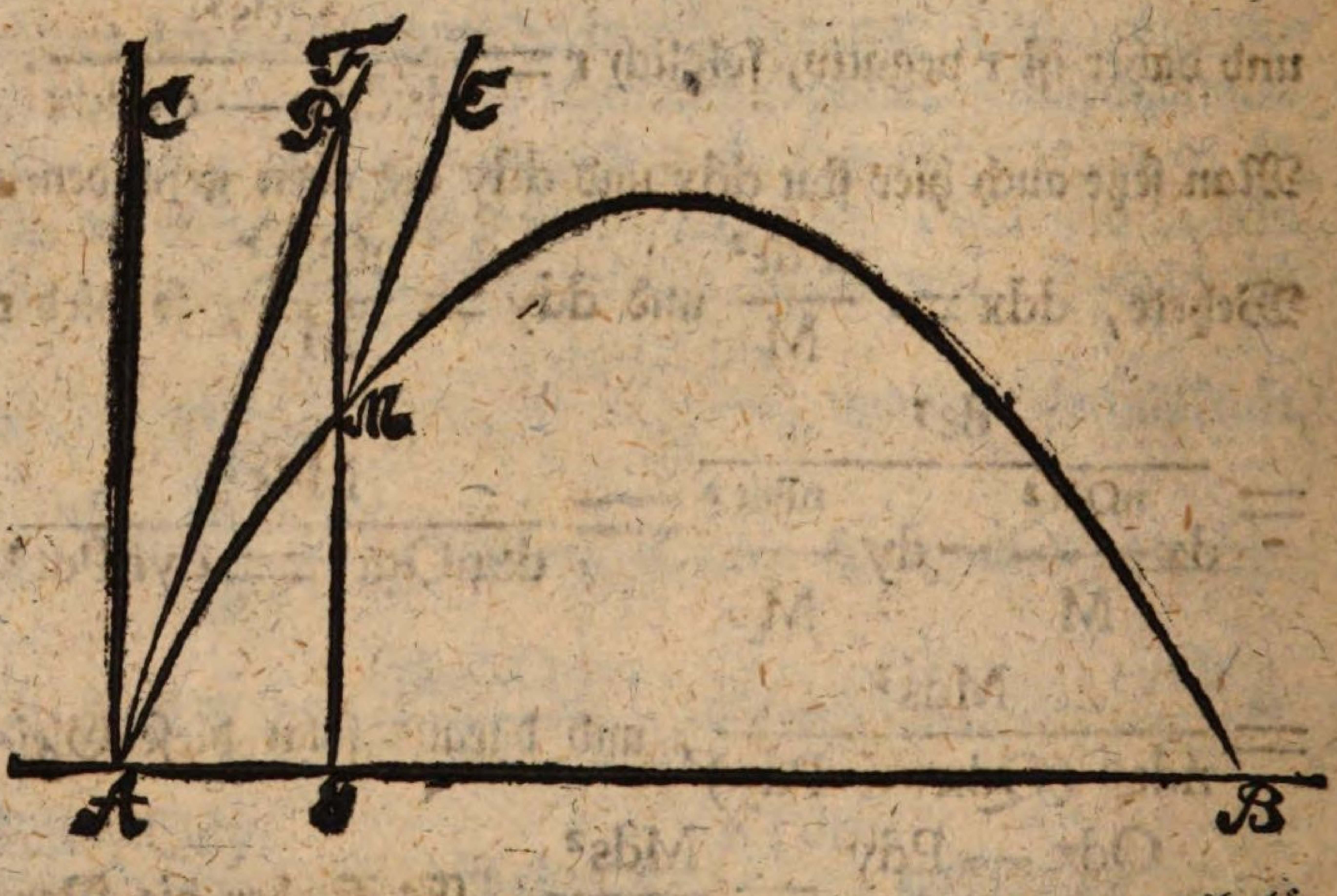
$$= \frac{ds^3}{dx\frac{nQdt^2}{M} - dy\frac{nPdt^2}{M}} = \frac{Mds^3}{dxnQdt^2 - dynPdt^2}$$

$= \frac{Mds^3}{ndt^2\,(Qdx - Pdy)}$, und daraus folgt diese Gleichung $\frac{Qdx - Pdy}{ds} = \frac{Mds^2}{nrdt^2}$. Es ist aber die Normalkraft $= \frac{Qdx - Pdy}{ds}$. Wenn man also diese mit P

 bezeich-

bezeichnet, so ist $P = \frac{Mds^2}{nrdt^2}$, und da $\frac{ds}{dt} = c$, so wird $P = \frac{Mc^2}{nr}$, oder $r = \frac{Mc^2}{nP}$. Und dies ist die zweyte von den Gleichungen, die ich beweisen wolte.

Ich wil noch in einem leichten Beyspiel zeigen, wie man durch Anwendung des Eulerischen Grundsatzes die völlige Auflösung einer mechanischen Aufgabe findet, und die oben angeführten Abhandlungen des Herrn Eulers sollen mir dabey zum Muster dienen. Es werde ein Punkt A, dessen Masse = M nach der Richtung AF, deren Lage in Ansehung einer andern graden Linie AB gegeben ist, mit einer Geschwindigkeit = $\sqrt{c}$ fortgeworfen, so daß c die altitudo huic celeritati debita ist. Es werde eben dieser Punkt während seiner Bewegung in einem jeden Punkt M seines Weges von einer Kraft P, deren Wirkung auf den Punkt A beständig einerley bleibt, nach der Richtung



MG, so auf der gegebenen graden Linie AB perpendikulär ist, getrieben: Man sol für eine jede gegebene Zeit t den Ort des Punkts und zugleich eine Gleichung für die Linie finden, durch welche der Punkt A fortgehet.

Die Auflösung. Der Punkt A würde vermöge seiner Verbleibungskraft in der graden Linie AF beständig mit der Geschwindigkeit $\sqrt{c}$ fortgehen, wenn sonst keine Kraft auf ihn würkte. Er wird aber in dieser graden Linie nicht bleiben können, sondern nach Verfliessung der Zeit t sich in einem Punkt M ausser der graden Linie AF befinden, welches auf derjenigen Seite der Linie AF sich befinden mus, wohin die Richtung der gegebenen Kraft P gehet. Er wird also gegen AB zu liegen müssen. Ich lasse von M eine Perpendikullinie MG auf AB fallen, und verlängere dieselbe, bis sie die grade Linie AF in P schneidet, so ist MG die Richtung, nach welcher der bewegte Punkt in M von der Kraft P getrieben wird. Ich ziehe durch M eine grade Linie ME mit AF parallel, so ist dis die Richtung, nach welcher der Punkt A fortgegangen seyn würde, wenn die Kraft P auf ihn gar nicht gewürkt hätte. Ich nehme AF für die Hauptaxe, und AC, welche mit PG parallel ist, für die Coordinirte Axe, so daß AP = x und PM = y. Die Kraft P treibt den Punkt M nach der Richtung MG mit der Coordinirten Axe parallel, und dies giebet die Gleichung $\frac{2ddy}{dt^2} = \frac{P}{M}$. Der Punkt A geht aber zugleich von M nach der Richtung ME fort, welche mit der Hauptaxe parallel ist; und da keine Kraft weiter da ist, welche den Punkt nach dieser Richtung treiben solte, als die blosse Verbleibungskraft, so ist $\frac{2ddx}{dt^2} = 0$. Aus der ersten Gleichung folgt $\frac{2ddy}{dt} = \frac{P}{M} dt$, und $\frac{2dy}{dt} + C = \frac{P}{M} t$ weil P eine Constans ist. Die Constans C ist = 0, weil, $\frac{dy}{dt}$ die Geschwindigkeit ausdrükt, mit welcher

A nach der Richtung der coordinirten Axe fortgehet und eine Funktion der Zeit t ist, diese Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ aber $= 0$ ist, wenn $t = 0$. Aus der Gleichung $\frac{2dy}{dt} = \frac{P}{M}t$ folgt weiter $2dy = \frac{P}{M}tdt$, und also $2y = \frac{P}{2M} \times tt$, oder $4y = \frac{P}{M}tt$. Diese Gleichung giebt die Grösse von y für die Zeit t. Aus der andern Fundamentalgleichung $\frac{2ddx}{dt^2} = 0$ folgt $\frac{dx}{dt} = C$, welches anzeigt, daß die Geschwindigkeit, mit welcher A nach der Richtung der Hauptaxe fortgehet, von einer beständigen Grösse sey. Nun war diese Geschwindigkeit gleich in Anfange der Bewegung $= \sqrt{c}$, und also ist $\frac{dx}{dt} = \sqrt{c}$, daraus folgt $dx = dt\sqrt{c}$, und $x = t\sqrt{c}$. Diese Gleichung giebt für die Zeit t die Grösse der Abscisse x, und also ist die Aufgabe so weit aufgelöset, daß für eine jede gegebene Zeit t der Ort M des bewegten Punkts gefunden werden kan. Die Gleichung für die Linie, durch welche der Punkt fortgehet, wird gefunden, wenn man aus den beyden schon gefundenen Gleichungen t eliminirt. Aus der ersten folgt $t = \sqrt{\frac{4My}{P}}$, und aus der andern $t = \frac{x}{\sqrt{c}}$, folglich ist $\sqrt{\frac{4My}{P}} = \frac{x}{\sqrt{c}}$, oder $\frac{4My}{P} = \frac{xx}{c}$, die Gleichung für den Weg, durch welchen der Punkt A fortgehet. Wenn AB die Horizontlinie, MG die Vertikallinie, A ein schwerer

Körper, und P die natürliche Schwere desselben ist, so wird $\frac{P}{M} = 1$, folglich $4y = tt$, und $4cy = xx$. Alsdann ist die krumme Linie, deren Natur die Gleichung $4cy = xx$ ausdrükt, diejenige, nach welcher ein schwerer auf der Erde fortgeworfener Körper fortgehen würde, wenn die Luft seiner Bewegung nicht wiederstünde, und weil die Gleichung $4cy = xx$ von der zweyten Ordnung ist, so wird dieses eine krumme Linie und zwar eine von den Kegelschnitten seyn.

In dem rechtwinklichten Triangel APG sind alle Winkel bekant. Denn der Winkel FAB ist gegeben. Es sey derselbe $= \alpha$, sein sinus $= \mu$ und sein cosinus $= \nu$, der sinus totus $= 1$; so ist $1 : (AP = x) = \mu : PG$, und $PG = \mu x$, ferner $1 : x = \nu : AG = \nu x$. Es sey $AG = z$ und $GM = u$, so ist $z = \nu x$, und $u = PG - PM = \mu x - y$, folglich $x = \frac{z}{\nu}$ und $y = \mu x - u = \mu \frac{z}{\nu} - u$. Sezt man diese Wehrte stat x und y in der Gleichung $4cy = xx$, so wird sie in diese verändert $4c\left(\mu \frac{z}{\nu} - u\right) = \frac{zz}{\nu\nu}$ oder $\frac{4c\mu z - 4c\nu u}{\nu} = \frac{zz}{\nu\nu}$, oder $u = \frac{\mu z}{\nu} - \frac{zz}{4c\nu\nu}$.

Und dies ist die Gleichung für die Parabel, wenn eine von den rechtwinklichten Ordinaten der Zwergaxe die Linie der Abscissen, und der Winkel der Coordinaten ein rechter Winkel ist. Weil $z = \nu x$ und $x = t\sqrt{c}$, so ist $z = \nu t\sqrt{c}$, und weil $u = \mu x - y$ und $y = \frac{tt}{4}$, so ist $u = \mu t\sqrt{c} -$

tt

$\frac{tt}{4}$. Auch diese beyden Gleichungen geben für jede gegebene Zeit t den wahren Ort des schweren Körpers. Und zwar giebt die erste $z = \nu t\sqrt{c}$ die Entfernung desselben von der Vertikallinie des Orts A, aus welchem der Körper fortgeworfen ist; die andre aber $u = nt\sqrt{c} - \frac{tt}{4}$ seine Höhe über den Horizontlinie für jede gegebene Zeit t, weil nun $dz = \nu dt\sqrt{c}$, und $du = (\mu\sqrt{c} - \frac{1}{2}t)\,dt$, so ist die Geschwindigkeit des Körpers in M $= \sqrt{(\nu\nu c + \mu\mu c - \mu t\sqrt{c} + \frac{1}{4}tt)} = \sqrt{(c - \mu t\sqrt{c} + \frac{1}{4}tt)}$ und $\frac{\mu\sqrt{c} - \frac{1}{2}t}{\nu\sqrt{c}}$ = dem Tangenten des Winkels, unter welchem die Direktionslinie des Körpers, wenn er sich in M befindet, die Horizontallinie schneidet.

Nachricht.

Die Herrn Verfasser der Göttingischen Anzeigen haben mich mit einer geneigten Beurtheilung des ersten Stüks dieser Schrift beehret, und zugleich etwas gegen die erste Abhandlung von der Differential- und Integralrechnung erinnert. Dieses zweyte Stük war schon fertig und dem Druk übergeben, da ich den Auszug aus dem ersten Stük las, und ich würde desselben im Anfange erwehnet haben, wenn nicht die beyden ersten Bogen damahls schon wären abgedrukt gewesen. Der Hauptzweifel ist indessen in dem ersten Bogen dieses zweyten Stüks würklich gehoben. Dasjenige was ich von der 35 bis zur 48 Seite ausgeführet habe, enthält die Vorbereitungslehren, wodurch ich diesem Zweifel vorzubeugen, und worauf ich die Erklärung der wahren Natur der gesamten Differentialrechnung zu gründen, mir schon vorgesezt hatte. Der berühmte Maclaurin hat in seiner Treatise of Fluxions nach meiner geringen Einsicht die Sache ohne Noht viel zu weitläuftig vorgetragen. Die Gründe, worauf er die Fluxionenrechnung bauet, sind in der Algebra und Geometrie keine principia domestica. Es ist nicht nöhtig, auf tiefsinnige Betrachtungen der Lehre von der Bewegung diese Rechnungen zu bauen. Sie gehören zur Algebra, und können ohne grosse Weitläuftigkeit auf Grundsätze, die der Algebra eigen sind, gegründet werden.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav, 1732-1787

Beyträge zur Aufnahme der Theoretischen Mathematik

Bd.: Das zweyte Stük

Rostock 1759

Math.u. 84-1/4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625644-6
VD18 91002540